# Kompakt topologikus terek struktúrájáról

MTA Doktori Értekezés Tézisei

**Szentmiklóssy Zoltán**

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest

**2015**

# Bevezetés

## Kitűzött kutatási feladat

A disszertáció célja a kompakt topologikus terek struktúrájának a vizsgálata. Egy topologikus teret kompaktnak nevezünk, ha bárhogy lefedve a teret nyílt halmazokkal, a lefedő halmazok közül már véges sok is lefedi a teret. Általában a topológiát egy adott halmazon a nyílt (illetve zárt) halmazok megadása jelenti. Részhalmazok egy $\tau$ rendszere akkor határoz meg az $X$ halmazon egy topológiát, azaz az összes nyílt halmazok rendszerét, ha $\tau$ zárt tetszőleges unióra és véges metszetre, valamint $X$ és $\emptyset$ szerepel a nyílt halmazok között. Igen sok vizsgálat tárgya volt, hogy ugyanazt a topológiát hogyan lehet meghatározni másképp mint az összes nyílt halmaz megadásával.

Például tekinthetjük a nyílt halmazoknak egy alkalmas részhalmazát, amellyel minden más nyílt halmazt unió képzéssel kaphatunk meg, így jutunk el a bázis fogalmához. Tehát nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *bázisa* a $\tau$ topológiának, ha minden $G$ nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$-beli nyílt halmazok uniójaként. Természetes kérdés, hogy egy adott $X$ topologikus térnek mekkora a "legkisebb" bázisa, azaz legkevesebb hány nyílt halmaz határozza meg az összes nyílt halmazt. Így kapjuk az $X$ topologikus tér *súlyát*, a $w(X)$ számosságfüggvényt. Ennek a függvénynek a bevezetése és vizsgálata jól mutatja az általános topológia és a halmazelmélet szoros kapcsolatát. Speciális esetként kapjuk a *második megszámlálható* vagy $M_2$ tér fogalmát, ha a súly megszámlálható. Uriszon híres metrizációs tétele még 1925-ből való, miszerint minden reguláris $M_2$ tér metrizálható. Pontosabban az eredeti tétel csak normális terekről szólt, reguláris terekre egy évvel később Tyihonov bizonyította az állítást.

A topológiát meghatározhatjuk "lokálisan" is. Az $X$ tér nyílt halmazaiból álló $\mathcal{B}$ rendszert az $x \in X$ pont *környezetbázisának* nevezzük, ha minden $x \in G$ nyílt halmaz esetén van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $x \in B \subset G$. Ennek a fogalomnak a segítségével definiáljuk az $X$ *tér* $\chi(X)$ *karakterét*, mint azt a legkisebb $\kappa$ számosságot, amire a tér minden pontjának van legfeljebb $\kappa$ számosságú környezetbázisa. Amennyiben az $X$ tér karaktere $\aleph_0$, a teret *első megszámlálhatónak* vagy $M_1$ térnek nevezzük. Alekszandrov és Uriszon közel 50 évig megoldatlan sejtése volt, hogy minden kompakt $M_1$ tér számossága legfeljebb kontinuum. A sejtést végül Arhangelszkij bizonyította 1969-ben mégpedig általánosabb formában, Lindelöf terekre.

Más módon is meghatározhatunk topológiát egy $X$ halmazon. Tetszőleges $A \subset X$ részhalmazra definiáljuk $\overline{A}$-t, az $A$ halmaz *lezárását*, mint a legszűkebb $A$-t tartalmazó zárt halmazt. Ezt az $A \to \overline{A}$ hozzárendelést *lezárási operátornak* nevezzük. Ennek megadása egyértelműen meghatározza az $X$ tér topológiáját. Egy tetszőleges $X$ metrikus térben egy $A$ részhalmaz lezárását megadják azok a pontok, amelyekhez lehet az $A$ halmazból konvergálni, ezért egy metrikus tér topológiáját egyértelműen meghatározzák a konvergens sorozatok. Nem minden topológiával van ez így még kompakt terek esetében sem. Például a diszkrét megszámlálható $N$ tér Čech-Stone kompaktifikációjában, $\beta N$-ben egyáltalán nincs (nem triviális) konvergens sorozat.

A konvergencia fogalma általánosítható transzfinit sorozatokra. Legyen $\lambda$ egy rendszám. Az $X$-beli elemek $\langle x_\xi : \xi < \lambda \rangle$ sorozatáról azt mondjuk, hogy *($\lambda$ típusban) konvergál* az $x \in X$ ponthoz, ha az $x$ pont minden $G$ környezete tartalmazza a sorozat egy végszeletét, azaz $\exists \xi_0 < \lambda$ $\{x_\xi : \xi \geq \xi_0\} \subset G$. Közismert, hogy bármely kompakt $T_2$ térben minden nem izolált ponthoz lehet konvergálni valamilyen típusban.

Egy $D \subset X$ részhalmazt *diszkrétnek* nevezünk, ha $D$ minden $x$ pontjának van olyan környezete amelyik $D$-ből csak az $x$ pontot tartalmazza. Például bármely $T_1$ térben minden $\omega$ típusú konvergens sorozat pontjai diszkrét alteret alkotnak. Azt, hogy egy topologikus tér kompakt-e, már a diszkrét alterek eldöntik, pontosabban az $X$ tér akkor és csak akkor kompakt, ha minden diszkrét altér lezárása kompakt.

Így tehát a topologikus terek szerkezetének megismeréséhez fontos a diszkrét alterek illetve a konvergens transzfinit sorozatok vizsgálata. Ezeknek a kutatásoknak az eredményeit a disszertáció első része ismerteti. Ennek során hamar kiderül, hogy különösen kompakt terek esetén alapvető a tér szerkezetének az a jellemzője amit *szűkségnek* nevezünk. Egy $X$ topologikus tér $t(X)$ "szűksége" az a legkisebb számosság, amelyre a legfeljebb ekkora részhalmazok már meghatározza topológiát. Pontosabban $t(X) \leq \kappa$ azt jelenti, hogy minden $A \subset X$ és minden $x \in \overline{A}$ esetén megadható egy legfeljebb $\kappa$ számosságú $B \subset A$ úgy, hogy $x \in \overline{B}$.

Egy $X$ topologikus tér fontos jellemzője a tér $d(X)$ *sűrűsége*. Ez az a legkisebb $\kappa$ számosság, amelyhez található egy $D \subset X,\ |D| \leq \kappa$ részhalmaz, amelyik sűrű $X$-ben, azaz $\overline{D} = X.$ Nyilvánvaló tény, hogy ha $\kappa \geq d(X)$, és tetszőlegesen megadunk $\kappa$-nál több nyílt halmazt, akkor találunk közülük $\kappa$-nál többet, amelyek metszete nem üres. Az, hogy ez az utóbbi tulajdonság és a tér szűksége meghatározza-e az $X$ tér sűrűségét, a második fejezet kutatásainak a témája.

Nem üres nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *$\pi$-bázis*, ha minden nem üres nyílt halmaz tartalmaz egy $\mathcal{B}$-beli nyílt halmazt. Egy tetszőleges $X$ reguláris térben bármely sűrű halmaz és bármely $\pi$-bázis meghatározza a topológiát, mert segítségükkel elő lehet állítani minden reguláris zárt halmazt, azaz a nyílt halmazok lezárását. A kutatások következő feladata a $\pi$-bázisok bizonyos tulajdonságainak a vizsgálata volt.

A topológiai ismeretek alapjaihoz tartozik az a tény, hogy bármely $f : X \to Y$ folytonos leképezés esetén minden kompakt altér képe kompakt és minden összefüggő altér képe összefüggő altér $Y$-ban. Az, hogy ez a két tulajdonság a számegyenes illetve $\mathbb{R}^n$ esetén maga után vonja a folytonosságot is, már régóta ismert. A disszertációban leírt kutatások utolsó fejezete azt vizsgálja meg, hogy ezek az "őrzési" tulajdonságok milyen térosztályokon biztosítják egy leképezés folytonosságát.

## Vizsgálati módszerek

A kutatások során alapvetően a halmazelméleti topológia módszereit használjuk. Egy $X$ topologikus tér struktúrájának jellemzőit számosságok hozzárendelésével írhatjuk le. Ezeket a hozzárendeléseket *számosságfüggvényeknek* nevezzük. Ilyen például az eddig említettek közül a súly, $w(X)$, a sűrűség, $d(X)$ és a szűkség, $t(X)$. A számosságfüggvények közötti kapcsolatokat a halmazelmélet, ezen belül a végtelen kombinatorika módszereivel vizsgálhatjuk. A vizsgálatok halmazelméleti jellegénél fogva gyakran szembesülünk olyan állításokkal amelyek igazságát nem lehet (vagy nem tudjuk) a halmazelmélet szokásos axiómarendszeréből, ZFC-böl levezetni. Ilyenkor a "forszolás" technikájának segítségével kaphatunk olyan, a ZFC axiómarendszert kiterjesztő axiomarendszert, ahol már bizonyítható az állítás.

## Definíciók, jelölések

A disszertáció használja a halmazelmélet és a topológia megszokott jelöléseit.

### Számosságfüggvények

Itt adjuk meg a legtöbbször használt számosságfüggvényeket. A teljesség kedvéért megismételjük azokat is, amelyek már szerepeltek a kutatási feladatok leírásánál.

Legyen $X$ egy $T_1$ topologikus tér. Hogy elkerüljünk néhány kényelmetlen esetszétválasztást, a továbbiakban feltesszük, hogy az $X$ tér végtelen. Azt is feltesszük, hogy minden tér $T_1$ tér, azaz a véges részhalmazok zártak $X$-ben.

**Globális számosságfüggvények.**

- Nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *bázis*, ha minden $G$ nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$-beli nyílt halmazok uniójaként.
  Az $X$ tér *súlya*, $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ bázis $\}$.
  Az $X$ tér *$M_2$ tér*, ha $w(X) = \omega$.

- Nem üres nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *$\pi$-bázis*, ha minden nem üres nyílt halmaz tartalmaz egy $\mathcal{B}$-beli halmazt.
  Az $X$ tér *$\pi$-súlya*, $\pi(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ $\pi$-bázis $\}$.

- Egy $D \subset X$ halmaz sűrű $X$-ben, ha $\overline{D} = X$.
  Az $X$ tér *a tér sűrűsége*, $d(X) = \min\{|D| : D$ sűrű $X$-ben $\}$.
  Az $X$ tér *szeparábilis*, ha $d(X) \le \omega$.

- Az $X$ tér *Lindelöf száma*,
  $L(X) = \min\{\kappa :$ minden nyílt fedésnek van legfeljebb $\kappa$ számosságú részfedése $\}$.
  Az $X$ tér *Lindelöf*, ha $L(X) = \omega$.

- Nyílt halmazok egy $\mathcal{G}$ rendszere *celluláris*, ha elemei páronként diszjuktak.
  Az $X$ tér *celluralitása*, $c(X) = \sup\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G}$ celluláris$\}$ .
  Az $X$ tér *Szuszlin tulajdonságú*, ha $c(X) = \omega$.
  $\widehat{c}(X) = \min\{\kappa :$ nincs $\kappa$ számosságú celluláris rendszer$\}$.

- Egy $D \subset X$ részhalmazt *diszkrétnek* nevezünk, ha $D$ minden $x$ pontjának van olyan környezete amelyik $D$-ből csak az $x$ pontot tartalmazza.
  Az $X$ tér *szórása (spread)*, $s(X) = \sup\{|D| : D$ diszkrét $\}$.
  $\widehat{s}(X) = \min\{\kappa :$ nincs $\kappa$ számosságú diszkrét részhalmaz$\}$.

- Azt mondjuk, hogy az $\{x_\xi : \xi < \lambda\} \subset X$ egy ($\lambda$ hosszú) *szabad sorozat*, ha bármely kezdőszelet lezárása diszjunkt a megfelelő végszelet lezárásától, azaz
  $\forall \xi < \lambda \ \overline{\{x_\eta : \eta < \xi\}} \cap \overline{\{x_\eta : \eta \ge \xi\}} = \emptyset.$
  $F(X) = \sup\{|S| : S$ szabad sorozat $\}$
  $\widehat{F}(X) = \min\{\kappa :$ nincs $\kappa$ hosszú szabad sorozat $\}$

**Lokális számosságfüggvények.**

Legyen $x$ az $X$ tér egy tetszőleges pontja.

- Nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *környezet bázisa* az $x \in X$ pontnak, ha $\mathcal{B}$ minden eleme tartalmazza az $x$ pontot és az $x$ pont minden környezete ($x$-et tartalmazó nyílt halmaz) tartalmaz egy $\mathcal{B}$-beli halmazt.
  Az $x$ pont *karaktere* $X$-ben,
  $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ környezet bázisa $x$-nek $X$-ben $\}$.
  Az $X$ tér *karaktere*,
  $\chi(X) = \min\{\kappa :$ minden pont karaktere legfeljebb $\kappa\}$.
  Az $X$ tér $M_1$ vagy *első megszámlálható tér*, ha $\chi(X) \leq \omega$.

- Az $x$ pont *pszeudo-karaktere* $X$-ben,
  $\psi(x, X) = \min\{\kappa : x$ előáll legfeljebb $\kappa$ darab nyílt halmaz metszeteként$\}$
  Az $X$ tér *pszeudo-karaktere*,
  $\psi(X) = \min\{\kappa :$ minden pont pszeudo-karaktere legfeljebb $\kappa\}$ .

- Az $x$ pont *szűksége* $X$-ben,
  $t(x, X) = \min\{\kappa : (\forall A \subset X, x \in \overline{A})(\exists B \subset A)|B| \leq \kappa$ és $x \in \overline{B}\}$.
  Az $X$ tér *szűksége*,
  $t(X) = \min\{\kappa :$ minden pont szűksége legfeljebb $\kappa\}$.

- Nem üres nyílt halmazok egy $\mathcal{B}$ rendszere *lokális $\pi$-bázis* az $x$ pontban, ha $x$ minden környezete tartalmaz egy $\mathcal{B}$-beli halmazt.
  Az $x$ pont *$\pi$-karaktere* $X$-ben,
  $\pi\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ lokális $\pi$-bázisa $x$-nek $X$-ben$\}$.
  A tér *$\pi$-karaktere*,
  $\pi\chi(X) = \min\{\kappa :$ minden pontnak $\pi$-karaktere legfeljebb $\kappa\}$.

## Gyakran használt tételek számosságfüggvényekről

Itt sorolunk fel néhány, a disszertációban gyakran használt állítást.

- Egy $A \subset X$ halmaznak az $x \in X$ pont *teljes felhalmozódási pontja*, ha $x$ minden $U$ környezetére teljesül, hogy $|U \cap A| = |A|$.
  Egy $X$ tér akkor és csak akkor kompakt, ha minden végtelen részhalmaznak van teljes felhalmozódási pontja.

- (Tyihonov) Kompakt terek szorzata kompakt.

- Egy $f : X \to Y$ folytonos ráképezést *irreducibilisnek* nevezünk, ha $X$ minden valódi zárt részhalmazának a képe valódi része $Y$-nak.
  Ha $X$ és $Y$ kompakt $T_2$ terek, $f : X \to Y$ folytonosan ráképezés, akkor van olyan $F \subset X$ zárt altér, amelyre $f$ megszorítása már irreducibilis ráképezés $Y$-ra.

- Minden $X$ kompakt $T_2$ tér és minden $x \in X$ esetén $\psi(x, X) = \chi(x, X)$.

- (Arhangelszkij, 1971) Minden $X$ kompakt $T_2$ tér esetén $t(X) = F(X)$.

# 1. Diszkrét alterek

## 1.1. Konvergens szabad sorozatok kompakt terekben

Mint már említettük, van olyan kompakt $T_2$ tér, tudniillik $\beta N$, amelyben egyáltalán nincs (nem triviális) konvergens sorozat. Viszont minden $X$ kompakt $T_2$ térben minden nem izolált $p$ ponthoz lehet konvergálni $\kappa = \chi(p, X)$ típusban.

Másrészt ismert (ld. [8] vagy [71]), hogy az előbb említett $\beta N$ tér tartalmaz $\omega_1$ típusú konvergens sorozatot. Így tehát természetes kérdés, hogy minden végtelen kompakt $T_2$ tér tartalmaz-e $\omega$ vagy $\omega_1$ típusú konvergens sorozatot. A kérdést először Hušek fogalmazta meg a 70-es évek végén, és közel egy időben egy ehhez kapcsolódó erősebb kérdést Juhász István: Igaz-e, hogy minden nem első megszámlálható kompakt $T_2$ tér tartalmaz $\omega_1$ típusú konvergens sorozatot?

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ez az erősebb sejtés igaz, ha $t(X) > \omega$, sőt azt, hogy ebben az esetben a tér tartalmaz $\omega_1$ típusú konvergens *szabad* sorozatot. Pontosabban megmutatjuk, hogy ha egy kompakt $T_2$ tér tartalmaz $\kappa$ hosszú szabad sorozatot, ahol $\kappa > \omega$ reguláris számosság, akkor a tér tartalmaz egy ugyanilyen hosszú *konvergens* szabad sorozatot is. Az állítást két külön tételben bizonyítjuk aszerint, hogy a tér tartalmaz-e olyan zárt részhalmazt, amely ráképezhető-e a $2^\kappa$ Cantor-kockára vagy sem.

**1.1. Tétel.** [disz. 1.1] *Legyen $\kappa$ tetszőleges nem megszámlálható számosság valamint $f : X \to 2^\kappa$ egy folytonos irreducibilis ráképezése az $X$ kompakt $T_2$ térnek a $2^\kappa$ Cantor-kockára. Ekkor minden $x \in X$ pont esetén*

*(i) létezik egy $D \subset X \setminus \{x\}$, $|D| = \kappa$ diszkrét altér, amelyik konvergál $x$-hez abban az erős értelemben, hogy $x$ minden környezete csak megszámlálható pontot hagy ki $D$-ből;*

*(ii) ha még azt is feltesszük, hogy $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, akkor létezik egy $\{x_\xi : \xi \in \kappa\} \subset X \setminus \{x\}$, $\kappa$ típusú szabad sorozat, amelyik konvergál $x$-hez.*

**1.2. Tétel.** [disz. 1.2] *Legyen $\kappa > \omega$ egy reguláris számosság. Ha egy kompakt $T_2$ tér tartalmaz egy $\kappa$ típusú szabad sorozatot, akkor tartalmaz egy ugyanilyen hosszú konvergens szabad sorozatot is.*

Ennek az erős tételnek számos következménye van.

**1.3. Következmény.** [disz. 1.3] *Ha $2^\kappa = \kappa^+$, $X$ egy kompakt $T_2$ tér amelyben $\chi(X) > \kappa$, akkor az $X$ tér tartalmaz egy $F$ zárt alteret és ebben egy $p$ pontot úgy, hogy $\chi(p, F) = \kappa^+$, és ezért $F$ tartalmaz egy $\kappa^+$ típusú $p$-hez konvergáló sorozatot is.*

**1.4. Következmény.** [disz. 1.4] *Ha $V$-ben igz a kontinuum-hipotézis (KH) és $W$ ennek Cohen valósakkal való bővítése, akkor $W$-ben minden nem elő megszámlálható kompakt $T_2$ tér tartalmaz konvergens $\omega_1$-sorozatot.*

Ha $X$ egy topologikus tér, akkor az $X$ tér *diagonálisa*, $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X^2$. Ismert, hogy egy kompakt $T_2$ pontosan akkor metrizálható, ha $\Delta$ egy $G_\delta$ halmaz $X^2$-ben, azaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként.

Hušek a [24] cikkben vezette be a *kis diagonális* fogalmát: $\Delta$ kis diagonális, ha bármely nem megszámlálható $A \subset X^2 \setminus \Delta$ esetén $\Delta$-nak van olyan környezete, amelyik nem megszámlálható sok pontot kihagy $A$-ból. Ebben a cikben kérdezte, hogy vajon KH-ból következik-e, hogy minden kompakt $T_2$ tér amelynek kis diagonálisa van, metrizálható. A válasz igen, sőt erősebb is bizonyítható.

**1.5. Következmény.** [disz. 1.5] *Ha $W$ az előző állításban szereplő Cohen-modell, akkor $W$-ben minden $X$ kompakt $T_2$ tér metrizálható, ha $X$-nek kis diagonálisa van.*

Végül egy tétel, amelyik ugyan nem kapcsolódik a konvergens szabad sorozatokról szóló tételhez, viszont szorosan kapcsolódik a Hušek sejtéshez. Ehhez szükségünk van a $\clubsuit$ (treff) kombinatorikus elvre, amelyet Ostaszevskij (ld. [49]) vezetett be: minden $\alpha \in \omega_1$ limesz rendszámhoz megadható egy $\omega$ típusú $\alpha$-hoz konvergáló $S_\alpha \subset \alpha$ halmaz úgy, hogy bármely nem megszámlálható $H \subset \omega_1$ halmaz esetén van olyan $\alpha$ amelyre $S_\alpha \subset H$.

**1.6. Tétel.** [disz. 1.8] *Tegyük fel, hogy teljesül a $\clubsuit$ halmazelméleti feltevés és legyen $X$ egy (végtelen) megszámlálhatóan kompakt $T_2$ tér, amelyik nem tartalmaz (valódi) $\omega$ hosszú konvergens sorozatot. Ekkor $X$ tartalmaz egy $\omega_1$ számosságú $Y$ alteret úgy, hogy $Y$ minden (relatívan) nyílt része vagy megszámlálható vagy ko-megszámlálható (a komplementer megszámlálható).*

Ha a fenti tételben szereplő $Y$ egy $T_3$ tér, akkor $S$-*tér* is, azaz öröklődően szeparábilis de nem Lindelöf. Az is nyilvánvaló, hogy $Y$-nak legfeljebb egy teljes felhalmozódási pontja lehet. Egy topologikus teret *iniciálisan $\omega_1$-kompakt* térnek nevezünk, ha minden legfeljebb $\omega_1$ számosságú nyílt fedéséből kiválasztható egy véges részfedés. Ezt a terminológiát használva kapjuk a következő állítást:

**1.7. Következmény.** [disz. 1.8] *Ha $\clubsuit$ teljesül, akkor minden iniciálisan $\omega_1$-kompakt $T_2$ tér tartalmaz konvergens $\omega$- vagy $\omega_1$-sorozatot.*

## 1.2. Megszámlálhatóan szűk kompakt terek diszkrét alterei

Ebben a fejezetben kompakt terek diszkrét altereit vizsgáljuk, pontosabban azt, hogy ezek lezárása mekkora. Világos, hogy van olyan tér, például a $[0, 1]$ intervallum, ahol minden diszkrét altér mérete kisebb a tér számosságánál. De az már jóval nehezebb kérdés, hogy lehet-e olyan tér, ahol a diszkrét alterek lezárása is kisebb.

Adott $X$ tér esetén jelölje $g(X)$ azon zárt halmazok számosságainak a szuprémumát, amelyek egy diszkrét altér lezárásai, azaz

$g(X) = \sup\{|\overline{D}| : D \subset X$ diszkrét.

Hasonlóan a szabad sorozatoknál használt jelöléshez,

$\widehat{g}(X) = \min\{\kappa : \forall D \subset X(D$ diszkrét $\implies |\overline{D}| < \kappa$.

Arhangelszkij kérdezte 2003-ban: igaz-e, hogy minden $X$ kompakt tér tartalmaz olyan $D$ diszkrét alteret, amelyre $|\overline{D}| = |X|$, azaz $\widehat{g}(X) = |X|^+$? Egy kicsit gyengébb kérdés (ld. [2]), hogy $g(X) = |X|$ igaz-e? Abban a speciális esetben, amikor $|X|$ egy szinguláris erős limesz számosság, Hajnal és Juhász bizonyította (ld. [25, 4.2]) hogy ha $X$ $T_2$-tér, akkor $\widehat{s}(X) = |X|^+$, és így még olyan $D$ diszkrét altér is van, amelyre $|D| = |X|$.

K.Kunen mutatta meg, hogy az első sejtés általában nem igaz, ha létezik elérhetetlen számosság, míg a gyengébb állításra A. Dow (ld. [11]) mutatott konzisztens ellenpéldát. Az még mindig nyitott kérdés, hogy van-e ZFC ellenpélda valamelyik állításra.

Másrészt A. Dow bizonyította (ld. [11]), hogy az megszámlálhatóan szűk kompakt terek körében mondhatunk valami pozitívat is a problémáról.

**1.8. Tétel.** (A. Dow) [disz. 1.10] *Ha $X$ kompakt $\omega$-szűk tér akkor*

*(i)* $|X| \le g(X)^\omega$

*(ii) Ha* $|X| \le \aleph_\omega$ *akkor* $\widehat{g}(X) = |X|^+$.

Az általános kontinuum hipotézis egy gyengített változatával megválaszolhatjuk az eredeti kérdést az $\omega$-szűk terek esetén.

**1.9. Tétel.** [disz. 1.13] *Tegyük fel, hogy minden $\kappa$ számosság esetén $2^\kappa < \kappa^{+\omega}$. Ekkor minden $\omega$-szűk kompakt $T_2$-tér esetén $\widehat{g}(X) = |X|^+$, azaz van olyan $D$ diszkrét altér, amelyre $|\overline{D}| = |X|$.*

## 1.3. Tkacsenko addíciós tételei

Ebben a részben azt vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk egy térről amelyet "kevés" egyszerű (diszkréthez közeli) altér uniójaként tudunk előállítani.

Egy $X$ teret *$D$-térnek* nevezünk, ha bárhogy megadva $X$-en egy $\phi$ környezetkijelölést, található egy $D$ *zárt diszkrét* altér úgy, hogy

$\phi[D] = \bigcup\{\phi(x) : x \in D\} = X.$

Tetszőleges $X$ tér esetén jelölje

$D(X) = \min\{|\mathcal{A}| : X = \bigcup \mathcal{A}$ és minden $A \in \mathcal{A}$ $D$-tér $\}$.

Az $X$ teret *bal-szeparáltnak* mondjuk, ha megadható $X$-en egy jólrendezés, amelyre nézve a kezdőszeletek zártak. Tetszőleges $X$ tér esetén jelölje

$\mathrm{ls}(X) = \min\{|\mathcal{A}| : X = \bigcup \mathcal{A}$ és minden $A \in \mathcal{A}$ bal-szeparált $\}$.

Megjegyezzük, hogy $D(X)$ és $\mathrm{ls}(X)$ véges is lehet. Ismert (ld. [70]), hogy minden bal-szeparált tér $D$-tér is, így $D(X) \le \mathrm{ls}(X)$.

Az $X$ tér *diszpergált*, ha minden $A \subset X$ altérnek van izolált pontja. Az $X$ tér *szekvenciális*, ha bármely $A \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt halmaz, ha nem lehet $A$-ból ($\omega$ típusban) kikonvergálni.

M. Tkacsenko egy cikkében (ld. [62]) bizonyította a következőket: Ha $X$ egy megszámlálhatóan kompakt $T_3$ tér, amelyre $\mathrm{ls}(X) \le \omega$, akkor

(i) *$X$ kompakt,*

(ii) *$X$ diszpergált,*

(iii) *$X$ szekvenciális.*

Könnyű belátni, hogy ha egy kompakt diszpergált tér minden megszámlálhatóan kompakt altere kompakt, akkor a tér szekvenciális, ezért (iii) következik az (i) és (ii) állításokból. Az (i) és (ii) állításokat sikerült általánosítani a következő módon:

(A) *Ha $X$ megszámlálhatóan kompakt és $D(X) \leq \omega$, akkor $X$ kompakt.*

(B) *Ha $X$ kompakt,* $\mathrm{ls}(X) < N(\mathbb{R})$*, akkor $X$ diszpergált.*

Itt $N(\mathbb{R})$ jelöli a számegyenes Novák számát, azaz azt a legkisebb $\kappa$ számosságot, amelyre a számegyenes lefedhető $\kappa$ darab sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Ezt az $N(\mathbb{R})$ számosságot jelölik még $\mathfrak{m}$-al is, ez a sovány halmazok fedési száma.

Az (A) állítás gyengített változata, amikor $D(X)$ véges, megtalálható Gruenhage [20] cikkében.

Egy $X$ teret *iniciálisan $\kappa$-kompakt térnek* nevezünk, ha bármely legfeljebb $\kappa$ számosságú nyílt fedésének van véges részfedése.

Az (A) állítás egy változatát is sikerült bizonyítanunk:

**1.10. Tétel.** [disz. 1.14] *Legyen $\kappa$ végtelen számosság és $X$ iniciálisan $\kappa$-kompakt tér, $D(X) \leq \kappa$. Ekkor $X$ kompakt.*

A (B) állítást megfogalmazó tétel:

**1.11. Tétel.** [disz. 1.17] *Ha $X$ kompakt $T_2$ tér amelyre* $\mathrm{ls}(X) < N(\mathbb{R})$*, akkor $X$ diszpergált.*

A két fenti tétel egy következménye, amely erősíti Tkacsenko említett tételét, mert az $X$ térre $T_3$ helyett csak a $T_2$ tulajdonságot követeli meg:

**1.12. Következmény.** [disz. 1.18] *Legyen $X$ megszámlálhatóan kompakt $T_2$ tér,* $\mathrm{ls}(X) \leq \omega$*. Ekkor $X$ kompakt, diszpergált és szekvenciális.*

## 1.4. $d$-szeparábilis hatványterek és $C_p(X)$ terek

Egy topologikus teret *$d$-szeparábilis* térnek nevezünk, ha található benne olyan sűrű altér, amelyik megszámlálható sok diszkrét tér uniója. Minden szeparábilis és minden metrikus tér $d$-szeparábilis.

Először Arhangelszkij tanulmányozta ezeket a tereket az [3] cikkében. Itt bizonyította, hogy $d$-szeparábilis terek tetszőleges szorzata $d$-szeparábilis. A [64] cikkben Tkacsuk keresett olyan feltételeket, amelyek mellett egy $X$ téren folytonos függvények $C_p(X)$ tere $d$-szeparábilis. Ugyanitt vetett fel néhány problémát bizonyos terek véges illetve végtelen hatványainak $d$-szeparábilis tulajdonságárol. Ebben a részben ezekre a kérdésekre válaszolunk.

**1.13. Tétel.** [disz. 1.21] *Legyen $\kappa$ végtelen számosság, $X$ pedig olyan $T_1$ tér, amelyre $\widehat{s}(X^\kappa) > d(X)$. Ekkor $X^\kappa$ $d$-szeparábilis.*

Jegyezzük meg, hogy minden, legalább 2 pontos $T_1$ tér $\kappa$-adik hatványa, $X^\kappa$, tartalmazza a $2^\kappa$ Cantor kockát és így tartalmaz $\kappa$-ás diszkrét alteret. Ezért, ha az előző tételt a $\kappa = d(X)$ esetre alkalmazzuk, kapjuk a következő állítást, amely válasz a [64, 4.10] problémára.

**1.14. Következmény.** [disz. 1.22] *Bármely $X$ $T_1$ tér $d(X)$-edik hatványa $d$-szeparábilis.*

A következő tétel segítségével megválaszolhatjuk az említett cikkben szereplő [64, 4.2] probléma második felét. Ez a tétel önmagában is érdekes.

**1.15. Tétel.** [disz. 1.23] *Ha $X$ kompakt $T_2$ tér, akkor $X^2$ tartalmaz $d(X)$ számosságú diszkrét alteret.*

A Szuszlin egyenes tanúsítja, legalább is konzisztencia erejéig, hogy a tételben $X^2$ nem helyettesíthető $X$-el. Másrészt Shapirovszkij eredménye ([25, 3.13]) alapján $d(X) \leq s(X)^+$ minden $X$ kompakt $T_2$ tér esetén.

Mivel $X^2$ beágyazható $X^\omega$-ba, ezért az előző tételekből következik, hogy

**1.16. Következmény.** [disz. 1.25] *Ha $X$ kompakt $T_2$ tér, akkor $X^\omega$ d-szeparábilis.*

A következő tétel mutatja, hogy ennél erősebbet is mondhatunk $X$ $\omega$-adik hatványáról. Ehhez először válasszunk egy fix pontot $X$-ből és jelöljük 0-val. Jelölje, a véges tartójú függvények analógiája alapján

$\sigma(X^\omega) = \{x \in X^\omega : \{i < \omega : x(i) \neq 0\}$ véges $\}$.

Nyilvánvaló, hogy $\sigma(X^\omega)$ sűrű $X^\omega$-ban, ezért ha ez az altér $d$-szeparábilis, akkor $X^\omega$ is az.

**1.17. Tétel.** [disz. 1.26] *Tegyük fel, hogy az $X$ térre teljesül, hogy valamilyen $k < \omega$ esetén az $X^k$ térnek van $d(X)$ számosságú diszkrét altere. Akkor $\sigma(X^\omega)$ (és így $X^\omega$ is) d-szeparábilis.*

Jegyezzük meg, hogy abból, hogy $X^\omega$ $d$-szeparábilis, a "legtöbb" esetben, nevezetesen ha $\mathrm{cf}(d(X)) > \omega$, következik, hogy $X$-nek van olyan véges hatványa, amelyik tartalmaz $d(X)$ méretű diszkrét alteret. Az már nem feltétlenül igaz, hogy van $X$-nek olyan véges hatványa, amelyik $d$-szeparábilis. Egy ilyen térre példa a $\beta N \setminus N$ tér.

A következő tétel segítségével negatív választ adhatunk Tkacsuk már említett [64, 4.9] problémájának egyik részére: igaz-e, hogy ha egy $X$ tér valamilyen végtelen $X^\kappa$ hatványa $d$-szeparábilis, akkor már az $X^\omega$ is $d$-szeparábilis. Egy teret erős $L$-térnek nevezünk, ha reguláris, nem szeparábilis de minden véges hatványa öröklődően Lindelöf. Ilyen tér létezése következik a kontinuum hipotézisből, de például $MA_{\aleph_1}$ esetén nincs erős $L$-tér.

**1.18. Tétel.** [disz. 1.27] *Legyen $X$ erős L-tér úgy, hogy $d(X) = \omega_1$. Akkor $X^{\omega_1}$ d-szeparábilis de $X^\omega$ nem. ZFC-ben található olyan $Y$ tér, melyre $Y^{\omega_2}$ d-szeparábilis de $Y^{\omega_1}$ nem az.*

Végül a következő tétel választ ad arra a (ld. [64, 4.1]) kérdésre, hogy van-e ZFC-ben olyan $X$ (Tyihonov) tér, amelyre $C_p(X)$ nem $d$-szeparábilis.

Jelölje $Col(\kappa, 2)$ azt az állítást, hogy megadható $\kappa$ párjainak olyan színezése 2 színnel, melyre bármely $0 < n < \omega$ esetén bárhogy véve $\kappa$ darab diszjunkt $n$-es halmazt, közöttük minden lehetséges színezés előfordul. Shelah színezési tétele szerint (ld. [59]) $Col(\lambda^+, 2)$ teljesül minden nem megszámlálható reguláris $\lambda$ esetén.

**1.19. Tétel.** [disz. 1.28] *Ha $Col(\kappa, 2)$ teljesül a $\kappa = \lambda^+$ rákövetkező számosságra, akkor a $\kappa$ súlyú $D(2)^\kappa$ Cantor kockának van olyan $X$ sűrű altere, amelyre $C_p(X)$ nem d-szeparábilis.*

## 1.5. A Čech-Pospišil tétel egy erősítése

Jelölje $\mathrm{dis}(X)$ azt a legkisebb $\kappa$ számosságot, amelyre $X$ előáll $\kappa$ darab diszkrét altér uniójaként, azaz

$\mathrm{dis}(X) = \min\{|\mathcal{D}| : \bigcup \mathcal{D} = X, \forall D \in \mathcal{D}$ diszkrét $\}$.

A [44] cikkben merült fel a következő probléma: ha $X$ egy zsúfolt (önmagában sűrű) kompakt $T_2$ tér, akkor igaz-e, hogy $\operatorname{dis}(X) \geq \mathfrak{c}$? Ezt a kérdést Gruenhage megválaszolta [21] cikkében: Ha $f : X \to Y$ perfekt ráképezés az $X$ és $Y$ topologikus terek között, akkor $\operatorname{dis}(X) \geq \operatorname{dis}(Y)$. Mivel tetszőleges kompakt zsúfolt tér folytonosan (és ezért perfekt módon) ráképezhető a $[0, 1]$ intervallumra, ezért a kérdésre igenlő a válasz.

Ebben a részben egy másik megoldást adunk a fenti problémára, ami egyben erősítése a klasszikus Čech-Pospišil tételnek is (ld. [25, 3.16]), amely azt mondja ki, hogy ha egy kompakt $T_2$ térben minden pont karaktere legalább $\kappa$, akkor a tér számossága legalább $2^\kappa$.

Legyen $\lambda$ egy végtelen számosság. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert *$\lambda$-elágazónak* mondunk, ha $|\mathcal{F}| < \lambda$, de $\mathcal{F}$-nek van $\lambda$ darab olyan részrendszere, amelyek metszetei nem üres, páronként diszjunkt halmazok.

**1.20. Tétel.** [disz. 1.31] *Ha az $X$ kompakt $T_1$ tér tartalmazza zárt halmazoknak egy $\lambda$-elágazó rendszerét, akkor* $\operatorname{dis}(X) \geq \lambda$.

Ebben a tételben, ellentétben a következő állítással, amelyik a Čech-Pospišil tételnek megígért általánosítása, nem tettük fel, hogy a tér $T_2$, a bizonyításhoz elég, hogy a tér $T_1$.

**1.21. Következmény.** [disz. 1.32] *Ha $X$ kompakt $T_2$ tér úgy, hogy minden $x \in X$ pont esetén $\chi(x, X) \geq \kappa$, akkor* $\operatorname{dis}(X) \geq 2^\kappa$.

A [44, Theorem 3] cikkben egy ehhez kapcsolódó állítás szerepel. Ennek kimondásához azonban néhány fogalmat ismertetnünk kell: Az $X$ teret *jobb-szeparáltnak* mondjuk, ha megadható $X$-en egy jólrendezés, amelyre nézve a kezdőszeletek nyíltak. Jegyezzük meg, hogy egy $X$ tér pontosan akkor jobb-szeparált, ha diszpergált. Tetszőleges $X$ tér esetén jelölje

$\operatorname{rs}(X) = \min\{|\mathcal{A}| : X = \bigcup \mathcal{A}$ és minden $A \in \mathcal{A}$ jobb-szeparált $\}$.

Ha $X$ kompakt $T_2$ tér és minden $x \in X$ pont esetén $\chi(x, X) \geq \kappa$, akkor $rs(X) \geq \kappa^+$. Mivel minden diszkrét tér egyben jobb-szeparált is, az idézett tétel erősebb az előző állításnál, ha $2^\kappa = \kappa^+$.

## 1.6. A $\kappa$-kompaktság egy interpolációs tulajdonsága

Egy $X$ topologikus teret *$\kappa$-kompaktnak* nevezünk, ha minden $\kappa$ számosságú alterének van teljes felhalmozódási pontja. A bevezetőben (ld. 5 oldal) ismertetett egyik tétel szerint egy tér pontosan akkor kompakt, ha minden végtelen $\kappa$-ra $\kappa$-kompakt. Legyen most $\kappa$ egy szinguláris számosság és $\kappa = \sum\{\kappa_\alpha : \alpha < \operatorname{cf}(\kappa)\}$ ahol minden $\kappa_\alpha < \kappa\}$. Nyilvánvaló, hogy ha egy $X$ tér minden $\alpha < \operatorname{cf}(\kappa)$ esetén $\kappa_\alpha$-kompakt és $\operatorname{cf}(\kappa)$-kompakt, akkor $X$ $\kappa$-kompakt. Ez egy "extrapolációs" tulajdonsága a $\kappa$-kompaktságnak szinguláris $\kappa$ esetén. Ezért a kompakt terek fenti jellemzésében elég a $\kappa$-kompaktságot a reguláris $\kappa$ számosságok esetében feltenni.

Ebben a részben a $\kappa$-kompaktság egy "interpolációs" tulajdonságát bizonyítjuk, mégpedig azt, hogy ha $X$ egyszerre $\mu$- és $\lambda$-kompakt és $\mu < \kappa < \lambda$ ahol $\kappa$ egy szinguláris számosság, akkor $X$ $\kappa$-kompakt is. A bizonyítás használja Shelah PCF elméletét.

Legyen $\kappa$, $\mu$, $\lambda$ három számosság. Ekkor $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ a következő állítást jelöli: $\mu < \kappa < \lambda = \operatorname{cf}(\lambda)$ és megadható egy $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subset [\kappa]^\mu$ sorozat úgy, hogy $|\{\xi : |S_\xi \cap A| = \mu\}| < \lambda$ ha $A \in [\kappa]^{<\kappa}$.

**1.22. Tétel.** [disz. 1.36] *Tegyük fel, hogy $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ teljesül és az $X$ tér egyszerre $\mu$-kompakt és $\lambda$-kompakt. Akkor $X$ $\kappa$-kompakt is.*

A következő tétel szerint $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ csak szinguláris $\kappa$ esetén teljesülhet.

**1.23. Tétel.** [disz. 1.37] *Ha $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ igaz, akkor* $\mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\kappa)$.

E szerint a legkisebb $\mu$, amire adott $\kappa$ szinguláris számosság esetén $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ teljesülhet a $\mu = \mathrm{cf}(\kappa)$ eset, és ez teljesül is a $\lambda = \kappa^+$ választás mellett.

**1.24. Tétel.** [disz. 1.38] *Minden szinguláris $\kappa$ számosságra $\Phi(\mathrm{cf}(\kappa), \kappa, \kappa^+)$ igaz.*

A fenti tétel bizonyítása használja Shelah PCF elméletének egy alapvető eredményét [56, Main Claim 1.3, p. 46]: Minden szinguláris $\kappa$ esetén megadható reguláris számosságok egy $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$, $\kappa$-hoz konvergáló sorozata úgy, hogy a

$$P = \prod \{ \kappa_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \}$$

szorzatban van $\kappa^+$ hosszú *skála*, azaz megadható egy $\{ f_\xi : \xi < \kappa^+ \} \subset P$ sorozat, amelynek tagjai mod véges nőnek és minden $f \in P$ függvényt mod véges majorálnak.

A következő állítás szerint az előző tételben szereplő első paramétert, $\mathrm{cf}(\kappa)$-t minden olyan $\mu < \kappa$ számosságra kicserélhetjük, melyre $\mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\kappa)$.

**1.25. Tétel.** [disz. 1.39] *Ha $\Phi(\mathrm{cf}(\kappa), \kappa, \lambda)$ igaz valamely szinguláris $\kappa$ számosságra, akkor $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ is igaz, ha $\mathrm{cf}(\kappa) < \mu < \kappa$ és $\mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\kappa)$.*

Arhangelszkij a [4] cikkben vezette be és tanulmányozta azokat a tereket, amelyek minden nem megszámlálható $\kappa$ számosság esetén $\kappa$-kompaktak, ezeket a tereket *nem-megszámlálhatóan kompakt* tereknek nevezte. Ebben a cikkben Arhangelszkij megmutatta, hogy minden nem-megszámlálhatóan kompakt tér Lindelöf.

Egy hasonló fogalom már régóta szerepel az irodalomban: egy tér *lineárisan Lindelöf*, ha minden nem megszámlálható reguláris $\kappa$ esetén $\kappa$-kompakt. Sokan tanulmányozták azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett lesz egy lineárisan Lindelöf tér Lindelöf. Jegyezzük meg, hogy ha egy lineárisan Lindelöf tér megszámlálhatóan kompakt azaz $\omega$-kompakt, akkor kompakt is és így persze Lindelöf. A következő eredmény, ami a 1.24 és 1.25 interpolációs tételek közvetlen következménye, valami hasonlót mond ki a lineárisan Lindelöf tulajdonság és az $\aleph_\omega$-kompaktság kapcsolatáról.

**1.26. Tétel.** [disz. 1.40] *Minden lineárisan Lindelöf $\aleph_\omega$-kompakt tér nem-megszámlálhatóan kompakt és így Lindelöf.*

Az említett [4] cikkben Arhangelszkij azt is megmutatta, hogy nem-megszámlálhatóan kompakt terek meglehetősen behatároltak, csak kevéssel térhetnek el egy kompakt "magtól": Minden $X$ nem-megszámlálhatóan kompakt $T_3$ tér tartalmaz (egy esetleg üres) $C$ kompakt alteret úgy, hogy minden $U \supset C$ nyílt halmaz esetén $|X \setminus U| < \aleph_\omega$. Ezt az eredményt sikerült erősíteni úgy, hogy a $T_3$ szétválasztási axiómát gyengébb feltétellel helyettesítettük. Elég a $T_1$ tulajdonság plusz a van Douwen által bevezetett $wD$ tulajdonság (ld. [69]).

Egy $X$ tér $wD$ *(gyenge D)* tulajdonságú, ha bárhogy megadva egy megszámlálhatóan végtelen $A$ zárt diszkrét halmazt $X$-ben, találunk egy $B \subset A$ végtelen részt és egy $\{U_x : x \in B\}$

környezet-kijelölést úgy, hogy ezek a környezetek diszkrét rendszert alkossanak $X$-ben, azaz a tér minden $y \in X$ pontjának van olyan környezete, amely legfeljebb egy $B$-beli $x$-re metszi az $U_x$ halmazt.

Egy $X$ topologikus tér *$\kappa$-koncentrált* az $Y \subset X$ halmaz körül, ha $Y$ minden $U$ környezetére teljesül, hogy $|X \setminus U| < \kappa$.

Most már megfogalmazhatjuk az ígért állítást.

**1.27. Tétel.** [disz. 1.42] *Minden nem-megszámlálhatóan kompakt $wD$ tulajdonságú $T_1$-tér $\aleph_\omega$-koncentrált egy (esetleg üres) kompakt altér körül.*

Minden nem-megszámlálhatóan kompakt $T_3$ tér normális (mert Lindelöf), a $wD$ tulajdonság pedig a normalitás egy nagyon gyenge verziója. Ezért az 1.27 állítás az Arhangelszkij által bizonyított állítás erősítése.

A következő tétel mutatja, hogy a másik irányban is van kapcsolat a kompakt altér körüli $\kappa$-koncentráltság és a $\lambda$-kompakt tulajdonságok között.

**1.28. Tétel.** [disz. 1.43] *Ha egy tér $\kappa$-koncentrált egy kompakt altere körül, akkor minden $\lambda \geq \kappa$-ra $\lambda$-kompakt.*

# 2. Kaliberek, szabad sorozatok és a sűrűség

Ebben a fejezetben minden térről feltesszük, hogy $T_3$.

Egy $\kappa$ számosság kalibere az $X$ topologikus térnek, röviden $\kappa \in \mathrm{Cal}(X)$, ha akárhogy megadva $\kappa$ darab nyílt halmazt, található közülük $\kappa$ darab úgy, hogy ezek metszete nem üres.

Világos, hogy ha egy $X$ tér sűrűsége $< \mathrm{cf}(\kappa)$, akkor $\kappa$ kalibere $X$-nek. Sanyin mutatta meg (ld. [53]), hogy az állítás megfordítása nem igaz: a Tyihonov kocka sűrűsége akármilyen nagy (a hatványkitevő logaritmusa) lehet, pedig $\omega_1$ kaliber. Sok cikk vizsgálta azt a kérdést, hogy milyen plusz feltételek mellett kaphatunk felső korlátot $X$ sűrűségére $\mathrm{Cal}(X)$ ismeretében.

Például Shapirovszkij egy tétele (ld. [25, 3.25]) szerint kompakt $X$ tér esetén $d(X) < \kappa$, ha $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$ kaliber és $t(X) < \kappa$. Arhangelszkij egy tétele (ld. [7]) azt mondja ki, hogy $d(X) \le 2^\omega$ ha $X$ Lindelöf, $T(X) = \omega$ és $\omega_1 \in \mathrm{Cal}(X)$. Itt $T(X)$ jelöli azt a legkisebb $\kappa$ számosságot, amelyre igaz, hogy zárt halmazoknak minden $\rho = \mathrm{cf}(\rho) > \kappa$ hosszú növekvő sorozatának az uniója is zárt.

Ismert, hogy minden $X$ kompakt térben $t(X) = F(X)$, illetve, hogy Lindelöf térben $F(X) = \omega$ ha $T(X) = \omega$. Így tehát mindkét fent említett állítás olyan terekről szól, ahol a szabad sorozatok mérete korlátozott. Ebben a részben megmutatjuk, hogy a kaliberekre tett feltevések mellett lényeges feltétel a szabad sorozatok hosszának korlátozása.

Számosságok egy $(\lambda, \kappa)$ rendezett párja *(2-es) kaliber*, jelekkel leírva $(\lambda, \kappa) \in \mathrm{Cal}_2(X)$, ha bárhogy megadva $\kappa$ darab nyílt halmazt, mindig találunk közülük $\lambda$ darabot úgy, hogy a metszetük nem üres. Számosságok egy $(\mu, \lambda, \kappa)$ rendezett hármasa *(3-as) kaliber*, röviden $(\mu, \lambda, \kappa) \in \mathrm{Cal}_3(X)$,ha bárhogy megadva $\kappa$ darab nyílt halmazt, mindig találunk közülük $\lambda$ darabot úgy, hogy ezek közül bármely $\mu$-nél kevesebb halmaz metszete nem üres.

Nyilvánvaló, hogy ha $\lambda \in \mathrm{Cal}(X)$, akkor minden $\kappa \ge \lambda$ esetén $(\lambda, \kappa) \in \mathrm{Cal}_2(X)$, illetve ha $(\lambda, \kappa) \in \mathrm{Cal}_2(X)$ akkor $(\lambda, \lambda, \kappa) \in \mathrm{Cal}_3(X)$.

## 2.1. Ha $X$-ben nincs "hosszú" szabad sorozat

**2.1. Tétel.** [disz. 2.2] *Tegyük fel, hogy az $X$ térre és a $\lambda \le \kappa$ végtelen számosságokra teljesül, hogy $\widehat{F}(X) \le \lambda$ és $(\lambda, \lambda, \kappa) \in \mathrm{Cal}_3(X)$. Ekkor van olyan $\mu < \kappa$, amelyre $d(X) \le \mu^{<\lambda}$.*

Külön említést érdemel az a speciális eset, amikor $\lambda = \rho^+$ és $\kappa = (2^\rho)^+$ valamilyen $\rho$ számosságra. Ekkor ugyanis minden $\mu < \kappa$ számosság esetén $\mu^{<\lambda} \le (2^\rho)^\rho = 2^\rho$, ezért igaz a következő állítás.

**2.2. Következmény.** [disz. 2.3] *Ha $F(X) \le \rho$ és $(\rho^+, \rho^+, (2^\rho)^+) \in \mathrm{Cal}_3(X)$, akkor $d(X) \le 2^\rho$.*

Itt a $\rho = \omega$ esetben az említett Arhangelszkij tétel [7, Theorem 5.1] egy erősítését kapjuk, mivel a Lindelöf tulajdonság és $T(X) = \omega$ helyett elég az $F(X) = \omega$ feltétel. Ha viszont megtartjuk a $T(X) = \omega$ feltételt, akkor bizonyos esetekben jobb korlátot is mondhatunk a sűrűségre.

**2.3. Tétel.** [disz. 2.4] *Tegyük fel, hogy $2^\rho = \rho^{(+n)}$ valamilyen $n$ természetes számra, $F(X) \le \rho$, $T(X) \le \rho$ és $\rho^+$-tól $\rho^{(+n)}$-ig minden számosság kalibere $X$-nek. Ekkor $d(X) \le \rho$.*

Ennek a tételnek két következményét említjük meg.

**2.4. Következmény.** [disz. 2.5] *Ha* $2^{\rho} = \rho^{+}$, $F(X) \leq \rho$, $T(X) \leq \rho$ *és* $\rho^{+} \in \mathrm{Cal}(X)$, *akkor* $d(X) \leq \rho$.

**2.5. Következmény.** [disz. 2.6] *Tegyük fel, hogy* $\aleph_{\omega}$ *erős limesz,* $T(X) = \omega$, $\widehat{F}(X) \leq \aleph_{\omega}$ *és tetszőleges* $n > 0$ *természetes szám esetén* $\aleph_n \in \mathrm{Cal}(X)$. *Ekkor* $X$ *szeparábilis.*

## 2.2. Ha $X$ előáll "kevés" kompakt altér uniójaként úgy, hogy egyikben sincs "hosszú" szabad sorozat

A következőkben olyan $X$ terekről mutatjuk meg, hoagy a sűrűségük "kicsi", amelyekre a kaliberekre tett feltevések mellett feltesszük, hogy $X$ előáll "kevés" kompakt tér uniójaként úgy, hogy egyik részben sincs "hosszú" szabad sorozat. Mivel bármely $Y$ kompakt $T_2$ tér esetén $F(Y) = t(Y)$, úgy is fogalmazhatunk, hogy az $X$ tér előáll kevés, "kis" szűkségű kompakt altér uniójaként.

**2.6. Tétel.** [disz. 2.8] *Tegyük fel, hogy* $X = \bigcup \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$, *ahol minden* $C \in \mathcal{C}$ *kompakt,* $\widehat{F}(C) \leq \kappa$ *és* $\kappa \in \mathrm{Cal}(X)$. *Ekkor* $d(X) < \kappa$.

**2.7. Tétel.** [disz. 2.9] *Tegyük fel, hogy* $\omega < \mu \leq \kappa$ *és* $X = \bigcup \mathcal{C}$ *ahol* $|\mathcal{C}| < \kappa$ *és minden* $C \in \mathcal{C}$ *esetén* $C$ *kompakt és* $\widehat{F}(C) \leq \mu$, *továbbá* $(\mu, \kappa) \in \mathrm{Cal}_2(X)$. *Ekkor* $d(X) < \kappa$.

Ennek a tételnek következményeként kapjuk a fejezet elején említett Sapirovszkij-tétel egy erősítését:

**2.8. Következmény.** [disz. 2.13] *Ha* $X$ *kompakt,* $\widehat{F}(X) \leq \mu$ *és* $(\mu, \kappa) \in \mathrm{Cal}_2(X)$ *akkor* $\pi(X) < \kappa$.

A 2.6 tételnek talán legérdekesebb esete, amikor $\kappa = \omega_1$: Ha $X$ előáll legfeljebb $\omega_1$ darab kompakt és megszámlálhatóan szűk altér uniójaként, és $\omega_1 \in \mathrm{Cal}(X)$, akkor $X$ szeparábilis. Ezt az esetet általánosítjuk a következő tételben:

**2.9. Tétel.** [disz. 2.16] *Legyen* $X$ *egy topologikus tér és* $\varrho$ *egy számosság úgy, hogy* $T(X) \leq \varrho$ *és valamely* $n > 0$ *természetes számra* $X = \bigcup \mathcal{C}$, *ahol* $|\mathcal{C}| \leq \varrho^{(+n)}$ *és minden* $C \in \mathcal{C}$ *kompakt. Tegyük fel még azt is, hogy* $0 < i \leq n$ *esetén* $\varrho^{(+i)} \in \mathrm{Cal}(X)$. *Ekkor* $d(X) \leq \varrho$.

Végül egy példa mutatja, hogy ennek a fejezetnek az eredményei nem erősíthetők oly módon, ahogy a 2.8 következményben, azaz nem helyettesíthetjük $d(X)$-et $\pi(X)$-el. Jelölje

$$\delta(X) = \sup\{d(Y) : \overline{Y} = X\},$$

ekkor nyilvánvaló, hogy tetszőleges $X$ tér esetén

$$d(X) \leq \delta(X) \leq \pi(X).$$

**2.10. Példa.** [disz. 2.17] *Van olyan* $X$ *tér amelyik megszámlálható sok kompakt és megszámlálhatóan szűk altér uniója továbbá a tér szeparábilis és ezért minden* $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ *esetén* $\kappa \in \mathrm{Cal}(X)$, *de* $X$ *tartalmaz egy egy sűrű* $Y$ *alteret amelyre* $d(Y) = \delta(X) = \mathfrak{c} = 2^{\omega}$.

# 3. $\pi$-bázisok rendje

## 3.1. A projektív $\pi$-karakter, $\pi$-bázisok rendje

A "lokálisan kicsi" illetve "pontonként kicsi" halmazrendszerek fogalma sokféle topológiai tulajdonság vizsgálatánál előfordul. Mi most egy topologikus tér $\pi$-bázisának a rendjével foglalkozunk. Általában az $X$ halmaz részhalmazainak egy tetszőleges $\mathcal{A}$ rendszerének esetén $\mathcal{A}$ *rendje*, $\mathrm{ord}(\mathcal{A})$ jelöli azt a legkisebb $\kappa$ számosságot, amelyre minden $x \in X$ legfeljebb $\kappa$ darab $\mathcal{A}$-beli halmaznak eleme. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszert *pont-megszámlálhatónak* nevezünk, ha $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) \leq \omega$. Sapirovszkij bizonyította be, hogy ha $X$ kompakt, akkor $X$-nek van olyan $\pi$-bázisa, amelynek a rendje legfeljebb $t(X)$ (lásd [56] és [58]). Egy nagyon rövid és elegáns bizonyítás található Todorcsevics cikkében (ld. [67]). E tétel egy triviális következménye, hogy ha a kompakt $X$ térnek $t(X)^+$ kalibere, akkor $\pi(X) \leq t(X)$.

Arhangelszkij vezette be (ld. [6]) a *megszámlálható projektív $\pi$-karakter* fogalmát: az $X$ tér *projektív $\pi$-karaktere megszámlálható*, ha $X$ minden folytonos képének a $\pi$-karaktere megszámlálható. Megmutatta, hogy ha egy megszámlálható projektív $\pi$-karakterű kompakt térnek az $\omega_1$ kalibere akkor a tér szeparábilis vagy ami ugyanaz, a térnek van megszámlálható $\pi$-bázisa.

Jelölje $p\pi\chi(X) = \min\{\pi\chi(Y) : Y$ Tyihonov és folytonos képe $X$-nek$\}$. Ezt a számosságot az $X$ tér *projektív $\pi$-karakterének* nevezzük.

Mivel Sapirovszkij egy tétele szerint kompakt $X$ tér esetén $\pi\chi(X) \leq t(X)$ (lásd [53] illetve [5]-ben és [25]-ben) és mert kompakt tér folytonos képében a szűkség nem nő, ezért ha $X$ kompakt, akkor $p\pi\chi(X) \leq t(X)$. Így tehát Arhangelszkij fenti tétele erősíti az előző Sapirovszkij tétel következményét a $t(X) = \omega$ esetben.

Jelölje $\pi sw(X)$ ($\pi$-szeparáló súly, ld. [25, 74. oldal]) azt a legkisebb számosságot, amelyre $X$-nek van ilyen rendű $\pi$-bázisa.

Ezeket a fogalmakat használva, minden kompaktsági feltevés nélkül kapjuk a következő tételt:

**3.1. Tétel.** [disz. 3.2] *Bármely $X$ Tyihonov tér esetén $\pi sw(X) \leq p\pi\chi(X)$. Speciálisan, minden megszámlálható projektív $\pi$-karakterű Tyihonov térnek van pont-megszámlálható $\pi$-bázisa.*

Egy $f : X \to Y$ folytonos ráképezést *irreducibilisnek* nevezünk, ha minden $F \subsetneqq X$ zárt halmaz esetén $f(F) \neq Y$. Tetszőleges $\lambda < \kappa$ szánosságok esetén jelölje

$$\Sigma_\lambda(I, \kappa) = \{g \in I^\kappa : |\operatorname{supp} g| \leq \lambda\},$$

azaz az $I^\kappa$ Tyihonov kocka legfeljebb $\lambda$ tartójú elemeinek a halmazát. A $\lambda = \omega$ esetben egyszerűen $\Sigma(I, \kappa)$-t írunk. Itt $g \in I^\kappa$ esetén $g$ *tartója*, $\operatorname{supp} g = \{\xi < \kappa : g(\xi) \neq 0$. Az eredeti, kompakt terekről szóló Sapirovszkij-tétel bizonyítása azon alapult, hogy bármely $X$ kompakt tér $\pi(X) = \kappa$ esetén irreducibilisen beleképezhető $\Sigma_{t(X)}(I, \kappa)$-ba. A 3.1 tétel bizonyítása az irreducibilis leképezés fogalmának egy önmagában is érdekes általánosításán alapul.

Legyen $f : X \to Y$ egy folytonos szürjektív függvény az $X$ térből $Y$-ra. Azt mondjuk, hogy $f$ *$\pi$-irreducibilis*, ha $X$ minden *valódi* zárt $F$ alterének $f[F]$ képe *nem sűrű* $Y$-ban. Egy folytonos $f$ ráképezés pontosan akkor $\pi$-irreducibilis ha bármely nem-sűrű halmaz $f$ szerinti képe nem-sűrű. Az is világos, hogy egy zárt leképezés akkor és csak akkor $\pi$-irreducibilis, ha irreducibilis. Ezért kompakt Hausdorff terek esetén a két fogalom egybeesik.

Azt, hogy miért is szerepel a "$\pi$" a fogalom nevében, a következő tétel világítja meg:

**3.2. Tétel.** [disz. 3.4] *Legyen $f$ folytonos ráképezése az $X$ térnek $Y$-ra. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*(1) $f$ $\pi$-irreducibilis;*

*(2) az $X$ tér bármely $\mathcal{B}$ $\pi$-bázisa és bármely $B \in \mathcal{B}$ esetén $f[X \setminus B]$ nem sűrű $Y$-ban;*

*(3) $X$-nek van olyan $\mathcal{B}$ $\pi$-bázisa, hogy bármely $B \in \mathcal{B}$ esetén $f[X \setminus B]$ nem sűrű $Y$-ban;*

*(4) az $Y$ tér bármely $\mathcal{C}$ $\pi$-bázisának "őseképe", az $\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ halmazrendszer, $\pi$-bázisa $X$-nek;*

*(5) az $Y$ térnek van olyan $\mathcal{C}$ $\pi$-bázisa, hogy $\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ $\pi$-bázisa $X$-nek.*

**3.3. Következmény.** [disz. 3.5] *Ha az $f : X \to Y$ leképezés $\pi$-irreducibilis, akkor $\pi(X) = \pi(Y)$*

Azt mondjuk, hogy az $Y \subset I^\kappa$ halmaz 0-*beágyazott* az $I^\kappa$ Tyihonov kockába, ha minden $\alpha < \kappa$ esetén az

$$\{y \restriction \alpha : y \in Y \text{ és } y(\alpha) = 0\}$$

halmaz sűrű az $Y$ tér $Y \restriction \alpha = \{y \restriction \alpha : y \in Y\} \subset I^\alpha$ vetületében.

**3.4. Tétel.** [disz. 3.7] *Tegyük fel, hogy $Y$* 0-beágyazott *az $I^\kappa$ Tyihonov kockába és $\kappa$ reguláris. Ha $y \in Y$ egy olyan pont, amelyre minden $\alpha < \kappa$ esetén $y(\alpha) > 0$, akkor $\pi\chi(y, Y) = \kappa$.*

**3.5. Következmény.** [disz. 3.8] *Ha $Y$* 0-beágyazott *az $I^\kappa$ Tyihonov kockába, akkor bármely nem izolált $y \in Y$ pont esetén*

$$p\pi\chi(y, Y) \geq |\{\alpha : y(\alpha) > 0\}|,$$

*ha pedig $y \in Y$ izolált $Y$-ban, akkor $\{\alpha : y(\alpha) > 0\}$ véges halmaz. Ezért $Y \subset \Sigma_{p\pi\chi(Y)}(I, \kappa)$, mivel végtelen $Y$ esetén $p\pi\chi(Y) \geq \omega$.*

**3.6. Tétel.** [disz. 3.9] *Legyen $X$ tetszőleges Tyihonov tér, $\pi(X) = \kappa$. Ekkor megadható egy $\pi$-ireducibilis leképezés $X$-ről az $I^\kappa$ Tyihonov kocka egy 0-beágyazott $Y$ alterére .*

Így a 3.5 és 3.6-ből következik:

**3.7. Következmény.** [disz. 3.10] *Ha $X$ egy Tyihonov tér, $\pi(X) = \kappa$ és $p\pi\chi(X) = \lambda$, akkor $X$-nek van olyan $\pi$-irreducibilis $Y$ képe, amelyik $\Sigma_\lambda(I, \kappa)$ altere.*

Ez az állítás Sapirovszkij egy tételét erősiti (ld. [56] ill. [25, 3.22]), miszerint ha $X$ egy kompakt $T_2$ tér, akkor egy irreducibilis képe beágyazható az $I$ intervallum $\Sigma_{t(X)}$ hatványába.

A 3.1 tétel bizonyításához szükségünk van Sapirovszkij következő tételére (ld. [56] illetve [25, 3.24]):

**Tétel** (Sapirovskij)**.** *Ha az $Y \subset \Sigma_\lambda(I, \kappa)$, akkor $\pi sw(Y) \leq \lambda$.*

**3.8. Következmény.** [disz. 3.11] *Ha $X$ Tyihonov tér és $\kappa > p\pi\chi(X) \in \mathrm{Cal}(X)$, akkor $\pi(X) < \kappa$.*

Mivel kompakt $T_2$ $X$ tér esetén $t(X) \geq p\,\pi\chi(X)$, az állításból következik Sapirovszkij azon tétele, hogy ha egy kompakt térben $t(X)^+$ kaliber, akkor $\pi(X) \leq t(X)$. Az is látható, hogy az állítás erősíti Arhangelszkij azon tételét is (ld. [6]), kompakt helyett Tyihonov terekre, miszerint ha egy kompakt tér projektív $\pi$-karaktere $\omega$ és a térnek $\omega_1$ kalibere, akkor a tér szeparábilis.

Az ebben a részben szereplő tételekben a projektív $\pi$-karakter nem helyettesíthető egyszerűen a $\pi$-karakterrel, erre vonatkozó példák a következő részben kerülnek sorra (lásd [35]).

## 3.2. $M_1$ tér, amelynek nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa

Kompakt terek helyett Lindelöf tereket vizsgálva, V.Tkacsuk a [65] cikkében bizonyította, hogy feltéve a kontinuum hipotézist, KH-t, minden első megszámlálható Hausdorff térnek van pont-megszámlálható $\pi$-bázisa ha a tér Lindelöf vagy a cellularitása megszámlálható. ( A [65] cikkben minden térről fel volt téve, hogy Tyihonov, de a bizonyítás csak a Hausdorff tulajdonságot használja.) Ezt a tételt Sapirovszkij azon tétele motiválta, miszerint egy kompakt megszámlálható szűkségű térnek van pont-megszámlálható $\pi$-bázisa. Ugyanis a megszámlálható szűkség helyett az erősebb $M_1$ tulajdonságot feltéve gyengíthette a kompaktsági feltételt. Természetes kérdés, hogy Tkacsuk tételében a KH szükséges-e, illetve az, hogy van-e konzisztens ellenpélda $M_1$ térre. Habár V.Tkacsuk említett cikke 27 évvel a későbbi mint a Sapirovszkij-tétel megjelenése, a cikkben nyitott kérdés maradt egy konzisztens ellenpélda létezése.

Ebben a részben olyan ZFC (és más konzisztens) példákat konstruálunk, amelyek első megszámlálhatóak és nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisuk. Azt is megmutatjuk, hogy Tkacsuk említett, a kontinuum hipotézist használó eredményét nem lehet pusztán ZFC-ben bizonyítani.

### 3.2.1. ZFC példák

Tkacsuk [65] cikkében szerepel az az eredmény, [65, Theorem 3.1.], hogy ha egy $X$ tér szűksége és $\pi$-karaktere megszámlálható és $d(X) \leq \omega_1$, akkor $\pi sw(X) \leq \omega$. A cikkben szereplő problémák egyikében [65, Problem 4.11] Tkacsuk azt kérdezte, hogy a megszámlálható szűkség feltétele elhagyható-e. A válasz igenlő:

**3.9. Tétel.** [disz. 3.13] *Legyen $X$ topologikus tér, melyre $d(X) \leq \pi\chi(X)^+$. Ekkor $\pi sw(X) \leq \pi\chi(X)$.*

**3.10. Tétel.** [disz. 3.14] *Van olyan $X$ első megszámlálható 0-dimenziós Hausdorff (és így Tyihonov) tér, amelyre $|X| = \aleph_{\omega+1}$ és $\pi sw(X) \geq \aleph_\omega$, és így $X$-nek nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa.*

Az így kapott tér számossága, $\aleph_{\omega+1}$ jóval nagyobb mint a 3.9 tétel szerint lehetséges legkisebb számosság, tudniillik $\aleph_2$. De ennél kisebb példát, például $\aleph_\omega$ számosságút nem sikerült konstruálni. A sejtésünk az, hogy ha van ekkora tér, akkor van kisebb is. Ezt a $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ feltétel mellett be is tudtuk bizonyítani.

**3.11. Tétel.** [disz. 3.17] *Tegyük fel, hogy $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ és $X$ első megszámlálható tér, amelynek számossága $\aleph_\omega$. Ha $X$ minden $\aleph_\omega$-nál kisebb számosságú alterének van pont-megszámlálható $\pi$-bázisa, akkor $X$-nek is van.*

### 3.2.2. Példák "hosszú" Szuszlin-egyenesekből

A következő részben olyan példákat adunk, amelyeknek csak a sűrűségnél kisebb diszkrét alterei vannak. Hogy miért, az kiderül a következő tételből.

**3.12. Tétel.** [disz. 3.18] *Tegyük fel, hogy az $X$ topologikus térnek van olyan $\mathcal{B}$ $\pi$-bázisa, amelyre* $\operatorname{ord}(\mathcal{B})^+ < d(X)$. *Akkor $X$-nek van olyan $D$ diszkrét altere, amelyre $|D| \geq d(X)$.*

Meg kell jegyeznünk, hogy ez az állítás egyszerű következménye Sapirovszkij egy eredményének (ld. [25, 3.26]): Ha $\mathcal{B}$ az $X$ topologikus tér nem-üres nyílt halmazainak egy rendszere, amelynek rendje legfeljebb $\kappa$, akkor megadható diszkrét alterek egy $\{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ rendszere úgy, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ esetén $\bigcup\{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \cap B \neq \emptyset$. A 3.12 tétel bizonyítása mindenesetre teljesen más és jóval rövidebb, mint Sapirovszkij tételének a bizonyítása.

Az előző tétel következménye, hogy ha egy $X$ tér sűrűsége $\geq \omega_2$ és $\widehat{s}(X) \leq d(X)$, akkor $X$-nek nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa. Nem tudjuk, hogy van-e ilyen első megszámlálható Tyihonov tér ZFC-ben. Viszont $\mathfrak{c}$ számosságú (és sűrűségű) Hausdorff példa ismert, lásd [23], és ez mutatja, legalább is Hausdorff terekre, hogy a 3.2 fejezet alején szereplő, Tkacsuktól származó állítása hamis a kontinuum hipotézis feltevése nélkül.

Tehát olyan $M_1$ tereket keresünk, amelyekre $\widehat{s}(X) \leq d(X)$. Ilyen térre klasszikus (konzisztens) példa a Szuszlin egyenes. De ennek sűrűsége csak $\omega_1$, így céljainknak csak ennél "hosszabb" Szuszlin egyenes felel meg.

Legyen $\kappa$ egy végtelen számosság. Egy folytonos $\langle L, < \rangle$ rendezést rendezés-topológiával *$\kappa$-Szuszlin egyenesnek* nevezünk, ha $L$-ben legfeljebb $\kappa$ darab diszjunkt nyílt intervallum van (azaz $c(L) \leq \kappa$) de a sűrűsége, $d(L)$, nagyobb mint $\kappa$. Így tehát a közönséges Szuszlin egyenes ugyanaz, mint a $\omega$-Szuszlin egyenes.

**3.13. Tétel.** [disz. 3.19] *Ha $L$ $\kappa$-Szuszlin egyenes, akkor létezik olyan $X$ első megszámlálható altér, melyre $|X| = \kappa^+$ és $\pi sw(X) = \kappa$.*

Így tehát ha létezik $\omega_1$-Szuszlin egyenes, akkor van $\omega_2$ számosságú első megszámlálható tér (GO tér), amelynek nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa. Pillanatnyilag nem ismeretes olyan modellje ZFC-nek amelyben semmilyen $\kappa > \omega$-ra sincs $\kappa$-Szuszlin egyenes. Így aztán lehet, hogy az előző tétel valójában egy ZFC példát szolgáltat olyan $M_1$ (GO) térre, amelyre $\pi sw(X) > \omega$.

### 3.2.3. Példák $\mathcal{P}(\omega)$ részhalmazaiból

Legyen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ és jelölje $\mathcal{U}$ az $\omega$ ko-véges részhalmazainak a rendszerét. Ha $I \in \mathcal{I}$ és $U \in \mathcal{U}$, akkor legyen

$$[I, U)_\mathcal{I} = \{J \in \mathcal{I} : I \subset J \subset U\}.$$

Ha $\mathcal{I} = \mathcal{P}(\omega)$, akkor egyszerűen $[I, U)$-t írunk $[I, U)_{\mathcal{P}(\omega)}$ helyett.

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ halmazrendszer *stabil*, ha valahányszor $I \in \mathcal{I}$, $I =^* J$, azaz $I$ és $J$ szimmetrikus differenciája véges, akkor $J \in \mathcal{I}$.

Ha $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$, akkor $\tau_\mathcal{I}$ jelöli azt a topológiát az $\mathcal{I}$-n, amit az $[I, U)_\mathcal{I}$ alakú halmazok generálnak, $X_\mathcal{I}$ pedig az $\langle \mathcal{I}, \tau_\mathcal{I} \rangle$ topologikus teret.

**3.14. Tétel.** [disz. 3.21] *$X_{\mathcal{I}}$ első megszámlálható és 0-dimenziós Hausdorff tér.*

Tetszőleges $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ esetén jelölje $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$ az $\langle \mathcal{I}, \subset \rangle$ parciális rendezés kofinalitását. Azt mondjuk, hogy a $\kappa$ számosság *halmazkalibere* $\mathcal{I}$-nek, ha minden $\mathcal{J} \in [\mathcal{I}]^\kappa$ részrendszerhez található $\mathcal{K} \in [\mathcal{J}]^\kappa$ és $I \in \mathcal{I}$ úgy, hogy $\bigcup \mathcal{K} \subset I$. Kevésbé formálisan ez azt jelenti, hogy bármely $\kappa$ darab $\mathcal{I}$-beli halmaz közül kiválasztható $\kappa$ darab, amelyeknek van $\mathcal{I}$-beli felső korlátjuk.

**3.15. Tétel.** [disz. 3.22] *Legyen $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ tetszőleges. Ekkor*

*(i)* $d(X_{\mathcal{I}}) = \mathrm{cof}(X) \cdot \omega$;

*(ii) ha $\mathcal{I}$ stabil és $\kappa$ egy számosság, melyre $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, akkor $\kappa$ pontosan akkor kalibere az $X_{\mathcal{I}}$ térnek, ha $\kappa$ halmazkalibere $\mathcal{I}$-nek.*

Egy alkalmas $\mathcal{I}$ segítségével kapunk olyan $X_{\mathcal{I}}$, és így első megszámlálható teret, amelynek nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa.

**3.16. Tétel.** [disz. 3.23] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\omega)$ stabil, $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) > \omega$ és $\omega_1$ halmazkalibere $\mathcal{I}$-nek. Ekkor $\pi sw(X_{\mathcal{I}}) > \omega$.*

A $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{P}(\omega)$ egy *$\kappa$ hosszú mod véges erősen növekvő* sorozat, ha minden $\alpha < \beta < \kappa$ esetén $A_\alpha \setminus A_\beta$ véges és $A_\beta \setminus A_\alpha$ végtelen.

**3.17. Következmény.** [disz. 3.24] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}(\omega)$-ban van mod véges erősen növekvő $\omega_2$ hosszú sorozat. Akkor létezik egy első megszámlálható 0-dimenziós Hausdorff amelynek számossága $\omega_2$ és $\omega_1$ kalibere. Speciálisan $MA_{\omega_1}$ esetén van ilyen tér.*

Ez az eredmény megoldja a [65] cikkbeli 4.6 és 4.7 problémákat, megmutatva, hogy konzisztens olyan első megszámlálható Tyihonov tér létezése melynek $\omega_1$ kalibere (és így Szuszlin tulajdonságú), de nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa.

**3.18. Tétel.** [disz. 3.25] *Tegyük fel, hogy az $\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\} \subset \mathcal{P}(\omega)$ mod véges erősen növő sorozat teljesíti a következő feltételt:*

*$(*)$ Bármely $C \in [\omega_2]^{\omega_1}$ esetén van olyan $\{\alpha, \beta\} \in C^2$, hogy $A_\alpha \subset A_\beta$, ( azaz köztük a tartalmazás valódi, nem csak mod véges).*

*Ekkor a 3.17 következményben megkonstruált $X_{\mathcal{I}}$ tér öröklődően Lindelöf.*

Az így kapott tér egy első megszámlálható $L$-tér, ezért egy ilyen tér már nem létezik $MA_{\omega_1}$ feltevés mellett,lásd [61]. Viszont egy "természetes" CCC forszolással kaphatunk ilyen sorozatot.

**3.19. Tétel.** [disz. 3.26] *Van olyan CCC kényszerképzet, amellyel forszolva az új modellben már van a 3.18 tételben szereplő, a $(*)$ feltételnek eleget tevő mod véges erősen növekvő $\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ sorozat.*

**3.20. Következmény.** [disz. 3.27] *Konzisztens, hogy létezik egy első megszámlálható, öröklődően Lindelöf 0-dimenziós $X$ tér amelynek számossága $\omega_2$, az $\omega_1$ kalibere $X$-nek és $X$-nek nincs pont-megszámlálható $\pi$-bázisa.*

Ez a konstrukció megoldást szolgáltat az előbb említett [65] cikkben szereplő 4.3 problémára.

Jegyezzük meg végül, hogy önmagában a kontinuum hipotézis tagadása nem elég ahhoz, hogy találjunk egy mod véges erősen növő $\omega_2$ hosszú sorozatot $\mathcal{P}(\omega)$-ban. Kunen bizonyította (lásd [34]), hogy $\omega_2$ Cohen-valóst adva egy KH modellhez, nincs ilyen sorozatot $\mathcal{P}(\omega)$-ban. Így tehát ez a módszer sem alkalmas arra, hogy pusztán a kontinuum hipotézis tagadásával kapjunk az itt szereplő terekhez hasonló topologikus tereket.

# 4. Őrző függvények

Egy tetszőleges $f : X \to Y$ függvényt *őrző függvénynek* nevezünk, ha minden kompakt altér $f$ szerinti képe kompakt és minden összefüggő altér képe összefüggő.

Jól ismert, hogy minden folytonos függvény őrző. Egymástól függetlenül, többen megjegyezték, hogy $X$, $Y$-ra tett bizonyos feltételek esetén a megfordítás is igaz: minden $f : X \to Y$ őrző függvény folytonos. Az általunk ismert első ilyen eredmény még 1926-ból való (ld. [51]). Eszerint minden $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ őrző függvény folytonos.

Ahhoz, hogy ezt a klasszikus eredményt általánosítani lehessen más terekre is, érthető módon az kell, hogy az összefüggő halmazok illetve a kompakt halmazok meghatározzák a tér topológiáját. Például lokálisan összefüggő terekre, azaz olyan terekre, amelyeknek van összefüggő halmazokból álló bázisa, az összefüggő (nyílt) halmazok meghatározzák a topológiát. Másrészt például a Frèchet terekben, azaz olyan terekben, amelyekben ha egy $A$ halmaz torlódik egy $p$ ponthoz, akkor $A$-ból lehet $p$-hez konvergálni, a kompakt halmazok (speciálisan a konvergens sorozatok a limesszel) meghatározzák a topológiát.

Egy ideig sokat és sokan vizsgálták azt kérdést, hogy milyen feltételek mellett folytonos minden őrző függvény, de az általunk ismert eredmények közül a legfrissebb is még 1970-71-ből való: Evelyn R. McMillan [46] mutatta meg, hogy ha $X$ Hausdorff, lokálisan összefüggő és Frèchet, valamint $Y$ Hausdorff, akkor minden $f : X \to Y$ őrző függvény folytonos.

Jelölje $Pr(X, T_i)$ $(i = 1, 2, 3$ vagy $3\frac{1}{2})$ a következő állítást: Minden őrző függvény az $X$ térből egy tetszőleges $T_i$ térbe folytonos.

McMillan eredeti tételét egy kicsit általánosabban is bizonyítottuk, elhagyva az $X$ térre megkövetelt Hausdorff tulajdonságot.

**4.1. Tétel.** [disz. 4.8] *Ha $X$ lokálisan összefüggő Frèchet tér, akkor $Pr(X, T_2)$ teljesül.*

Ennek a tételnek a következő szemi-lokális verzióját is bizonyítjuk. Az $X$ tér egy $p$ pontját *Frèchet pontnak* nevezünk, ha bármely $A \subset X$, $p \in \overline{A}$ esetén megadható egy $\{p_n : n \in \omega\} \subset A$ sorozat úgy, hogy $p_n \to p$.

**4.2. Tétel.** [disz. 4.9] *Ha $X$ lokálisan összefüggő Hausdorff tér, $p$ Frèchet pont $X$-ben és $f : X \to Y$ őrző függvény egy $Y$ $T_{3\frac{1}{2}}$ térbe, akkor $f$ folytonos $p$-ben.*

Ez a tétel nem teljesen lokalizált változata a MacMillan tételnek, ugyanis a lokális összefüggőség globális feltétel, nem csak $p$-nek van összefüggő nyílt halmazokból álló környezet bázisa, hanem minden pontnak. Ez a következő természetes és részben nyitott kérdést veti fel:

**4.3. Probléma.** [disz. 4.10] *Az előző tételben elég-e feltenni, hogy $X$ csak a $p$ pontban lokálisan összefüggő?*

Erre a problémára részleges pozitív válaszokat sikerült adni úgy, hogy erősítettük a $p$ pontbeli Frèchet tulajdonságot, illetve úgy, hogy $2^\omega$-val korlátoztuk a pont karakterét. 4.2-ben az $Y$ térre vonatkozó $T_{3\frac{1}{2}}$ feltételt $T_3$-ra lehet gyengíteni, ha a $p$ pont karakterét $2^\omega$ helyett $\omega_1$-el korlátozzuk (ld. [disz. 4.12 - 4.15]).

Az $X$ tér egy $x$ pontját *szekvenciálisan összeköthetőnek (röviden SC pontnak)* nevezünk, ha minden $x_n \to x$ sorozatnak megadható egy $\langle x_{n_k} : k < \omega \rangle$ részsorozata és összefüggő halmazoknak egy $\langle C_k : k < \omega \rangle$ sorozata úgy, hogy minden $k$-ra $\{x_{n_k}, x\} \subset C_k$ (azaz $C_k$ összeköti az $x_{n_k}$ pontot $x$-el), továbbá $C_k \to x$, azaz $x$ minden környezete véges kivétellel az összes $C_k$-t tartalmazza. Az $X$ tér *SC tér*, ha minden pontja SC pont. Például bármely lokálisan összefüggő $M_1$ tér vagy bármely összefüggő lineárisan rendezett tér SC tér.

**4.4. Tétel.** [disz. 4.21] *Egy Hausdorff térbe képező őrző függvény minden SC pontban szekvenciálisan folytonos.*

Mivel egy Frèchet pontban a folytonosság és a szekvenciális folytonosság egybeesik, ezért

**4.5. Következmény.** [disz. 4.22] *Egy Hausdorff térbe képező őrző függvény minden olyan pontban folytonos, amelyik egyszerre SC pont és Frèchet pont.*

Példák nem folytonos őrző függvényekre:

**4.6. Példa.** [disz. 4.23] *E.R. McMillan mutatott példát olyan lokálisan kompakt SC térre, amelyen létezik nem folytonos őrző függvény. Ez a függvény persze szekvenciálisan folytonos (4.4) szerint.*

**4.7. Példa.** [disz. 4.24] *Ebben a példában a szekvenciális folytonosság sem marad igaz, Ez a példa lokálisan összefüggő öröklődöen Lindelöf és így $T_6$ tér amelynek a szűksége $\omega$. Persze ez a tér nem SC tér.*

A szekvenciális folytonosság és folytonosság kapcsolatának vizsgálatával további lokálisan összefüggő terek osztályaira sikerült bizonyítani, hogy a $T_3$ terekbe képező őrző függvények folytonosak.

Egy $X$ topologikus teret *monoton normálisnak* nevezünk, ha minden $A \subset X$ zárt és minden $A$-et tartalmazó $U$ nyílt halmazhoz megadható egy $H(A, U)$ nyílt halmaz (az $U$ "fele") úgy, hogy

1) $A \subset H(A, U) \subset \overline{H(A, U)} \subset U$;

2) ha $A \subset B$ és $U \subset V$ akkor $H(A, U) \subset H(B, V)$.

Minden monoton normális $T_3$ tér normális, és ellentétben a normalitással, a monoton normalitás öröklődik minden altérre. Például minden lineárisan rendezett tér és ezek alterei ( a GO terek) monoton normálisak. Az is igaz, hogy a metrikus terek is monoton normálisak.

**4.8. Tétel.** [disz. 4.33] *Ha $X$ lokálisan kompakt, lokálisan összefüggő és monoton normális, akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül.*

A következőkben szorzattereken értelmezett őrző függvények folytonosságát vizsgáljuk. Ehhez egy topologikus játék vizsgálata ad lehetőséget.

Legyen $X$ topologikus tér és $p \in X$. A $G(X, p)$ játékot ketten játsszák, **I** és **II**, $\omega$ fordulóban. Az $n$-edik lépésben **I** választ egy $p \in U_n$ nyílt halmazt majd **II** választ egy $x_n \in U_n$

pontot. **I** nyer , ha a létrejövő $\{x_n : n < \omega\}$ sorozat tartalmaz konvergens (nem feltétlen $p$-hez konvergáló) részsorozatot, egyébként **II** nyer.

Azt mondjuk, hogy a $p$ pont *nyerhető*, ha **I**-nek van nyerő stratégiája a $G(X, p)$ játékban. $X$ *nyerhető*, ha minden pontban nyerhető. Például minden megszámlálható karakterű pont nyerhető, és így minden $M_1$ tér nyerhető. Bármely összefüggő rendezett tér is nyerhető. Természetesen a szekvenciálisan kompakt terek is nyerhetők.

**4.9. Tétel.** [disz. 4.44] *Legyen $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ összefüggő és lokálisan összefüggő SC terek szorzata, $f : X \to Y$ pedig egy őrző függvény a reguláris $Y$ térbe. Ha a $p \in X$ és minden $s \in S$-re a $G(X_s, p(s))$ játék nyerhető, akkor $f$ folytonos a $p$ pontban.*

**4.10. Következmény.** [disz. 4.45] *$Pr(X, T_3)$ teljesül, ha $X$ összefüggő és lokálisan összefüggő nyerhető SC terek szorzata. Így például ha $X$ összefüggő rendezett terek szorzata, vagy $X$ összefüggő és lokálisan összefüggő első megszámlálható terek szorzata, akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül.*

Felhasználva Mary Ellen Rudin tételét (ld. [52]), miszerint minden kompakt monoton normális tér folytonos képe egy kompakt rendezett térnek:

**4.11. Következmény.** [disz. 4.47] *Legyen $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ ahol minden $X_s$ tényező kompakt, összefüggő, lokálisan összefüggő és monoton normális. Ekkor $Pr(X, T_3)$ (vagy ami a kompaktság miatt ugyanaz: $Pr(X, T_2$ ) teljesül.*

A (4.8) állítás szerint egy lokálisan kompakt, lokálisan összefüggő monoton normális tér esetén $Pr(X, T_3)$ teljesül. Felvetődik tehát a kérdés, hogy mit mondhatunk ilyen terek szorzatáról:

**4.12. Probléma.** [disz. 4.48] *Legyen $X$ lokálisan kompakt összefüggő és lokálisan összefüggő monoton normális terek szorzata. Igaz-e, hogy akkor $Pr(X, T_3)$ teljesül?*

Ennél lényegesen kevesebbet nem lehet feltenni a szorzattér tényezőiről. Ugyanis az előző állításokat összevetve:

**4.13. Következmény.** [disz. 4.49] *Legyen $X$ olyan $T_{3\frac{1}{2}}$ terek szorzata, amelyek lineárisan rendezettek és/vagy első megszámlálhatóak. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*a) $Pr(X, T_3)$;*

*b) $X$ lokálisan összefüggő;*

*c) a szorzat minden tényezője lokálisan összefüggő és véges sok kivételével összefüggő.*

A következő részben speciális térosztályokat vizsgálunk meg, a kompakt és szekvenciális tereket. Ez utóbbi tulajdonság definíciója megtalálható a 9. oldalon, eszerint az $X$ tér *szekvenciális*, ha bármely $A \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt halmaz, ha nem lehet $A$-ból ($\omega$ típusban) kikonvergálni. A (4.6) alatt említett példákban vagy a szekvencialitás, a Fréchet tulajdonság egy gyengített változata, vagy a kompaktság nem teljesült. Így természetesen merül fel a következő kérdés, amelyet csak részlegesen sikerült megválaszolni.

**4.14. Probléma.** [disz. 4.51] *Tegyük fel, hogy a lokálisan összefüggő $X$ tér*

*(i) szekvenciális és/vagy*

*(ii) kompakt.*

*Igaz-e, hogy akkor $Pr(X, T_2)$ vagy akár $Pr(X, T_{3\frac{1}{2}})$ teljesül?*

Az (i) alatti feltétel mellett a válasz pozitív, ha lokális összefüggés helyett az SC tulajdonságot követeljük meg. A következő tétel szerint ilyenkor az SC tulajdonság erősebb a lokális összefüggőségnél.

**4.15. Tétel.** [disz. 4.52 - 4.53] *Ha $X$ szekvenciális és SC, akkor lokálisan összefüggő és $X$-re $Pr(X, T_2)$ teljesül.*

A következőkben belátjuk, hogy egy ellenpélda a 4.14 problémára nem lehet olyan mint a (4.6 és 4.7) alatti példák, amelyek csak egyetlen pontban nem folytonosak. Ehhez egy olyan tulajdonságot vezetünk be, amelyik általánosítja mind a szekvencialitást mind a kompaktságot.

Az $X$ teret *k-térnek* nevezzük, ha a topológiát meghatározzák a kompakt alterek, pontosabban $A \subset X$ zárt akkor és csak akkor, ha minden kompakt $K \subset X$-re $A \cap K$ zárt.

Az $X$ teret *megszámlálhatóan $k$-térnek* nevezzük, ha bármely $A \subset X$ nem zárt részhalmazhoz megadható egy megszámlálhatóan kompakt $C$ altere $X$-nek úgy, hogy $A \cap C$ sem zárt. Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy az $X$ tér topológiáját meghatározzák a megszámlálhatóan kompakt alterei. Minden megszámlálhatóan kompakt és minden $k$-tér (és így minden szekvenciális tér) megszámlálhatóan $k$-tér. Könnyű látni, hogy ez a tulajdonság zárt alterekre és $T_3$ terek esetén nyílt alterekre is öröklődik.

**4.16. Tétel.** [disz. 4.55] *Legyen $X$ lokálisan összefüggő megszámlálhatóan $k$-tér, $Y$ reguláris, $f : X \to Y$ pedig egy nem folytonos őrző függvény. Ekkor $f$ több mint egy pontban nem folytonos. Ha $X$ is $T_3$ tér, akkor $f$ szakadási pontjai egy zsúfolt (önmagában sűrű) alteret alkotnak.*

Mit tudunk mondani, ha a (4.14) probléma mindkét feltétele teljesül, azaz $X$ kompakt és szekvenciális? Egy szekvenciális tér szűksége megszámlálható. Ezért erre a következő tétel szerint pozitív választ adhatunk, legalább is konzisztencia erejéig és azzal a plusz feltétellel, hogy $X$ cellularitása "nem túl nagy".

Jelölje $\mathfrak{p}$ azt a legkisebb számosságot, amelyhez megadható egy $\mathfrak{p}$ számosságú $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ halmazrendszer úgy, hogy $\mathcal{A}$ erősen centrált (véges sok $\mathcal{A}$-beli halmaz metszete végtelen) és minden $H \in [\omega]^\omega$ halmaz esetén van olyan $A \in \mathcal{A}$, amelyre $H \setminus A$ végtelen.

**4.17. Tétel.** [disz. 4.58] *Legyen $X$ egy lokálisan összefüggő kompakt $T_2$ tér, amelyre $t(X) = \omega$. Tegyük fel még azt is, hogy $|X| < 2^{\mathfrak{p}}$ és $\widehat{c}(X) \le \mathfrak{p}$. Ekkor $Pr(X, T_2)$ teljesül.*

**4.18. Tétel.** [disz. 4.59] *Tegyük fel, hogy $2^\omega < 2^p$ és $X$ lokálisan összefüggő, szekvenciálisan kompakt, $T_2$ tér, melyre $\widehat{c}(X) \le p$. Ekkor teljesül a $Pr(X, T_2)$ tulajdonság.*

A tétel kapcsán jegyezzük meg, hogy ha $X$ kompakt és szekvenciális, akkor szekvenciálisan kompakt.

Eddig nem esett szó a $Pr(X, T_1)$ tulajdonságról, azaz arról, hogy milyen terek esetén igaz, hogy már a $T_1$ terekbe menő őrző függvények is folytonosak. Ennek a fejezetnek az utolsó részében azt mutatjuk meg, hogy reguláris terek esetén csak a diszkrét $X$ terek rendelkeznek a $Pr(X, T_1)$ tulajdonsággal.

**4.19. Tétel.** [disz. 4.60] *Legyen $X$ egy $T_1$ tér. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

*a) Ha $Y$ egy $T_1$ tér és $f : X \to Y$ összefüggést őrző függvény, akkor az $f$ függvény folytonos.*

*b) Ha $Y$ egy $T_1$ tér és $f : X \to Y$ őrző függvény, akkor az $f$ függvény folytonos (azaz $Pr(X, T_1)$ teljesül).*

*c) Ha $Y$ topológiája a legdurvább $T_1$ topológia $Y$-on, az úgynevezett kovéges topológia, és $f : X \to Y$ őrző függvény, akkor az $f$ függvény folytonos.*

*d) Ha az $A \subset X$ altér nem zárt, akkor található egy $H \subset X$ összefüggő részhalmaz, amelyre $H \cap A \neq \emptyset \neq H \setminus A$ és $H \setminus A \neq \emptyset$ véges halmaz.*

**4.20. Következmény.** [disz. 4.61] *Ha az $X$ $T_1$ térre teljesül a $Pr(X, T_1)$ tulajdonság, akkor $X$-ben minden zárt altér az $X$ valahány komponensének topologikus összege.*

**4.21. Következmény.** [disz. 4.62] *Ha az $X$ $T_3$ térre teljesül a $Pr(X, T_1)$ tulajdonság, akkor $X$-ben minden zárt altér lokálissan összefüggő.*

És íme az ígért tétel:

**4.22. Tétel.** [disz. 4.63] *Ha az $X$ $T_3$ térre teljesül a $Pr(X, T_1)$ tulajdonság, akkor $X$ diszkrét.*

Az előző következmények miatt, elég bizonyítani a következő, önmagában is érdekes tételt:

**4.23. Tétel.** [disz. 4.64] *Ha az $X$ $T_3$ térben minden regulárisan zárt altér lokálisan összefüggő, akkor $X$ diszkrét.*

# Hivatkozások

[1] A. V. ARHANGEL′SKIĬ, *Frequency spectrum of a topological space and classification of spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **206** (1972), 265–268, English translation in Soviet Math. Dokl. 13 (1972), no. 5, 1185–1189.

[2] A. V. ARCANGELSKIĬ, *An extremally disconnected bicompactum of weight $\mathfrak{c}$ is inhomogeneous* , Dokl. Akad. Nauk SSSR, 175 (1967), 751-754.

[3] A. V. ARHANGELSKIĬ, *On $d$-separable spaces*, Proceedings of the Seminar in General Topology, P. S. Alexandrov ed., Mosk. Univ. P. H., 1981, 3–8.

[4] A. V. ARHANGELSKIĬ, *Homogeneity and Complete Accumulation Points*, Topology Proceedings 32 (2008), pp. 239–243

[5] A. V. ARHANGELSKIĬ, *Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants*, Russian Math. Surveys 33 (1978), pp. 33–96.

[6] A. V. ARHANGEL'SKII, *Precalibers, monolithic spaces, first countability, and homogeneity in the class of compact spaces*, Topology and its Appl., 155 (2008), no. 17-18, 2218-2136.

[7] A.V. ARHANGELSKII, *Projective $\sigma$-compactness, $\omega_1$-caliber, and $C_p$-spaces*, Topology Appl. 104 (2000) 13–16.

[8] B. BALCAR, P. SIMON, AND P. VOJTAS, *Refinement properties and extensions off ilters in Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 265-283.

[9] H. R. BENNETT AND AND T. G. MCLAUGHLIN, *A selective survey of axiom-sensitive results in general topology,* Texas Tech University Mathematics Series, No. 12. Lubbock, Tex., 1976. iv+114 pp.

[10] A. DOW, I. JUHÁSZ, L. SOUKUP, AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *More on sequentially compact implying pseudoradial*, Topology and its Applications, 73 (1996), pp. 191–195.

[11] A. DOW, *Closures of discrete sets in compact spaces*, Studia Sci. Math. Hub. 42 (2005), 227-234.

[12] A. DOW, *Compact spaces of countable tightness in the Cohen model*, Set Theory and its Appl. (J. Steprans and S. Watson, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1401, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 55-67.

[13] A. DOW, *An introduction to applications of elementary submodels in topology*, Topology Proc. 13 (1988), 17-72.

[14] R. DE LA VEGA AND K. KUNEN, *A Compact Homogeneous S-space*, Top. Appl. 136 (2004), 123 - 127.

[15] R. ENGELKING, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[16] P. ERDŐS, A. HAJNAL, A. MÁTÉ, AND R. RADO, *Combinatorial Set Theory*, Akad. Kiadó, Budapest, 1984.

[17] J. GERLITS AND I. JUHÁSZ, *On left-separated compact spaces*, CMUC 19 (1978), 53-62.

[18] J. GERLITS, I. JUHÁSZ, L. SOUKUP, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Characterizing continuity by preserving compactness and connectedness*, Topology Appl. 138 (2004), no. 1-3, 21–44.

[19] J. GERLITS, I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Two improvements on Tkaèenko's addition theorem*, Comment. Math. Univ. Carolin. 46 (2005), no. 4, 705–710.

[20] G. GRUENHAGE, *A note on $D$-spaces*, Topology Appl. 153 (2006), 2229–2240.

[21] G. GRUENHAGE, *Covering compacta by discrete and other separated sets*, Topology Appl. 156 (2009), no. 7, 1355–1360.

[22] A. HAJNAL, *Proof of a conjecture of S. Ruziewicz*, Fund. Math. 50 (1961/1962), pp. 123–128.

[23] A. HAJNAL AND I. JUHÁSZ, *On hereditarily $\alpha$-Lindelöf and hereditarily $\alpha$-separable spaces*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. 11 (1968), pp. 115–124.

[24] M. HUŠEK, *Topological spaces without K-accessible diagonal*, Comment. Math. Univ. Carolin. 18 (1977), 777-788.

[25] I. JUHÁSZ, *Cardinal functions – ten years later*, Math. Center Tract no. 123, Amsterdam, 1980

[26] I. JUHÁSZ, *Cardinal functions*, Recent Progress in General Topology, M. Hušek and J. van Mill, eds., North-Holland, 1992, 417–441.

[27] I. JUHÁSZ, *HFD and HFC type spaces*, Top. Appl. 126 (2002), 217–262.

[28] I. JUHÁSZ, *A weakening of club, with applications to topology*, Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), 767-773.

[29] I. JUHÁSZ, ON THE MINIMUM CHARACTER OF POINTS IN COMPACT SPACE, Proc. 1989. Top. Conf. Pécs, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 55(1993), 365-371.

[30] I. JUHÁSZ, *Two set-theoreticp roblemsi n topology*,Proc. Fourth Prague Sympos. on Gen. Topology Part A, Springer-Verlag, New York, 1977, pp. 115-123.

[31] I. JUHÁSZ, *Variations on tightness*, Studia Sci. Math. 24 (1989), 179–186.

[32] I. JUHÁSZ, *Cardinal functions II*, in: Handbook of Set Theoretic Topology, Eds: K. Kunen & J. E. Vaughan, Amsterdam, 1984, pp. 63–109.

[33] I. JUHÁSZ AND S. SHELAH, *$\pi(X) = \delta(X)$ for compact $X$*, Top. Appl. 32 (1989), 289-294.

[34] I. JUHÁSZ, L. SOUKUP, AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Combinatorial principles from adding Cohen reals*, Logic Colloquium '95 (Haifa), Lecture Notes in Logic 11, Springer, Berlin, 1998, pp. 79–103.

[35] I. JUHÁSZ, L. SOUKUP AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *First countable spaces without point-countable $\pi$-bases,* Fund. Math., 196 (2007), no. 2, 139–149.

[36] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Convergent free sequences in compact spaces*, Proc. AMS., 116 (1992), pp. 1153–1160.

[37] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Sequential compactness vs. pseudo-radiality in compact spaces*, Top. Appl., 50 (1993), pp. 47– 53.

[38] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Calibers, free sequences and density*, Topology Appl. 119 (2002), no. 3, 315–324.

[39] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *Discrete subspaces of countably tight compacta*, Ann. Pure Appl. Logic 140 (2006), no. 1-3, 72–74.

[40] I. JUHÁSZ, Z. SZENTMIKLÓSSY, *On $d$-separability of powers and $C_p(X)$*, Topology Appl. 155 (2008), no. 4, 277–281.

[41] I. JUHÁSZ,Z. SZENTMIKLÓSSY, *A strengthening of the Čech-Pospišil theorem*, Topology Appl. 155 (2008), no. 17-18, 2102–2104.

[42] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY, *Projective $\pi$-character bounds the order of a $\pi$-base,* Proc. AMS, 136 (2008), 2979-2984.

[43] I. JUHÁSZ AND Z. SZENTMIKLÓSSY,*Interpolation of $\kappa$-compactness and PCF*, CMUC, 50, 2 (2009), 315–320.

[44] I. JUHÁSZ AND J. VAN MILL, *Covering compacta by discrete subspaces*, Topology and its Applications, 154 (2007), pp. 283–286.

[45] V. L. KLEE AND W. R. UTZ, *Some remarks on continuous transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 182–184.

[46] EVELYN R. MCMILLAN, *On continuity conditions for functions*, Pacific J. Math. **32** (1970), 479–494.

[47] S. NEGREPONTIS, *Banach spaces and topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam, 1984, 1045–1142.

[48] JACEK NIKIEL, *Images of arcs—a nonseparable version of the Hahn-Mazurkiewicz theorem*, Fund. Math. **129** (1988), no. 2, 91–120.

[49] A. OSTASZEWSKI, *On countably compact, perfectly normal spaces*, J. London Math. Soc. (2) 14 (1976), 505-516.

[50] WILLIAM J. PERVIN AND NORMAN LEVINE, *Connected mappings of Hausdorff spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 488–496.

[51] C. H. ROWE, *Note on a pair of properties which characterize continuous functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 285–287.

[52] MARY ELLEN RUDIN, *Nikiel's conjecture*, Topology Appl. **116** (2001), no. 3, 305–331.

[53] N.A. ŠANIN, *On the product of topological spaces*, Trudy Math. Inst. Steklova 24 (1948) (in Russian).

[54] B.E. SHAPIROVSKIĬ,*On tightness, $\pi$-weight and related concepts*, Uč. Zap. Riga Univ. 3 (1976) 88-89.

[55] B. SHAPIROVSKIĬ, *Ordering and cardinal invariants in compacta*, Abstracts of International Conference on Topology Varna (1990) 41-42.

[56] B. E. Shapirovskii, *Special types of embeddings in Tychonoff cubes, subspaces of $\Sigma$-products and cardinal invariants,* in: Topology, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 23 (North-Holland, Amsterdam, 1980), pp. 1055–1086.

[57] B. E. Shapirovskii, *Maps onto Tikhonov cubes*, Russian Math. Surveys 35 (1980), pp. 235–238.

[58] B. E. Shapirovskii, *Cardinal invariants in compact Hausdorff spaces,* Amer. Math. Soc. Transl. 134 (1987), pp. 93–118.

[59] S. SHELAH, *Colouring and non-productivity of $\aleph_2$-cc,* Ann. Pure Appl. Logic 84 (1997), 153–174.

[60] P. SIMON, *Left-separated spaces: a comment to a paper of M. G. Tkačenko*, CMUC 20 (1979), 597-603.

[61] Z. SZENTMIKLÓSSY, *S-spaces and L-spaces under Martin's axiom*, Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 23, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, pp. 1139–1145.

[62] M. G. TKAČENKO, *O bikompaktah predstavimyh ... I and II*, CMUC **20**(1979), 361-379 and 381-395.

[63] V. V. TKAČUK, *Spaces that are projective with respect to classes of mappings*, Trudy Moskov. Mat. Obsč. 50 (1987), 138-155,

[64] V. V. TKACHUKN, *Function spaces and d-separability*, Questiones Mathematicae 28 (2005), 409–424.

[65] V. V. TKACHUK, *Point-countable $\pi$-bases in first countable and similar spaces*, Fund. Math. 186 (2005), pp. 55–69.

[66] S. Todorčevic, *Partition Problems in Topology*, Contemp. Math., AMS, vol. 84, (1989)

[67] S. TODORČEVIĆ, *Free sequences*, Top. Appl. 35 (1990), pp. 235–238.

[68] L. B. TREYBIG, *A characterization of spaces that are the continuous image of an arc*, Topology Appl. **24** (1986), no. 1-3, 229–239, Special volume in honor of R. H. Bing (1914–1986).

[69] E. VAN DOUWEN, *The Integers and Topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan editors, Elsevier, 1984, pp. 111–167

[70] E. VAN DOUWEN AND W. F. PFEFFER, *Some properties of the Sorgenfrey-line and related spaces*, Pacific J. of Math. **81** (1979), 371-377.

[71] J. VAN MILL, *An introduction to /8w, Handbook of Set-Theoretic Topology*, 1984, pp. 503-567.

[72] J. H. WESTON AND J. SHILLETO, *Cardinalities of dense sets*, Gen. Top. Appl. 6 (1976), 227-240.

[73] D. J. WHITE, *Functions preserving compactness and connectedness*, J. London Math. Soc. **3** (1971), 767–768.

[74] G. T. WHYBURN, *Continuity of multifunctions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1494–1501.